Cardanische Formel

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad | \; p := \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c \qquad q := b - \frac{a^2}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3}$$

$x_{2,3} = \ldots$ | per Polynomdivision mit x_1

→ Kubische Gleichungen haben immer genau 1 oder genau 3 reelle Lösungen (s. Graph einer kub. Fkt). Die obige Cardanische Formel liefert für x_1 immer eine reelle Lösung. D.h., auch wenn Minusquadratwurzeln in der Formel auftauchen, addieren sich diese immer zu einer reellen Zahl. Leider gibt es kein leichtes Verfahren, aus dem Minusquadratwurzel-Ausdruck die reelle Zahl zu berechnen. In Aufgabe 27 gelang das mit einem Trick, in der Regel muss jedoch die 3. Wurzel aus den jeweils komplexen Zahlen gezogen werden, was nur mit Polarkoordinaten (z.B. e-Form) und damit nur näherungsweise möglich ist (φ wird ja mit $\cos^{-1}$ bzw. $\tan^{-1}$ bestimmt). Die reelle Lösungszahl x_1 lässt sich folglich – trotz vorliegender Formel – meist nur näherungsweise bestimmen. Da das Näherungsverfahren über die Cardanische Formel (3. Wurzel) sehr aufwendig ist, wird diese heute nicht mehr verwendet, sondern x_1 direkt mit dem Newtonverfahren ermittelt.

→ Beachte, dass etwaige komplexe Lösungen (für $x_{2,3}$) nicht mit Hilfe der entsprechenden kubischen Funktion veranschaulicht werden können.

→ (Lemma von Gauß): Hat eine normierte (a_n=1) ganzrationale Funktion (Polynomfunktion) nur ganzzahlige Koeffizienten, so ist jede rationale Nullstelle ganzzahlig und ein Teiler von a_0.
Beispielsweise hat $y = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ die Nullstellen −3, −2, −1 und 1. Ebenso lässt sich die reelle Nullstelle 4 von $y = x^3 - 15x - 4$ leicht erraten und die übrigen mit Polynomdivision ermitteln.