Das erstaunliche Schnur-Orakel*

VON JOSCHA PROCHNO UND MICHAEL SCHMITZ, KIEL/FLENSBURG
(FÜR SCHULUNGSZWECKE LEICHT UMFORMULIERT VON STEFAN BARTZ)

***Zusammenfassung**: Anhand des überraschenden Schnur-Orakels wird gezeigt, wie ein leichtes stochastisches Problem auf natürliche Weise dazu anregen kann, weiterführende mathematische Fragen zu stellen und so verblüffende Ergebnisse der Hochschulmathematik zu erhalten. Der dargestellte Weg ist für interessierte Schüler konzipiert, die – neben den motivierenden Ergebnissen – typische Verfahrensweisen und Herausforderungen der Hochschulmathematik kennen lernen wollen.*

Das Schnur-Orakel

Man erzählt sich, dass junge Frauen früher ein einfaches Orakel nach ihrem Liebesglück befragt haben sollen. Das Orakel bestand aus drei gleich langen Schnüren, die in der Mitte in einer geschlossenen Faust so gehalten wurden, dass die sechs Enden alle unterhalb der Faust lose herunterhingen und die jungen Frauen nicht wussten, welche Enden zueinander gehörten.
Sie ergriffen nun zuerst ein beliebiges loses Schnurende und verknoteten es mit einem zufällig ausgewählten, zweiten losen Ende. Danach wiederholten sie diesen Vorgang so oft, bis jedes Schnurende mit einem anderen verknotet war. Dann wurde die Faust geöffnet und man betrachtete den "Orakelspruch". Bildeten die drei Schnüre einen einzigen großen Ring, so würde man großes Glück in der Liebe erfahren![1]?

Man fragt sich, ob es nicht furchtbar unwahrscheinlich ist, durch das wahllose Zusammenknoten einen einzigen Ring zu erzeugen. Erst recht, wenn nicht nur 3 sondern gar 4, 5 oder n Schnüre vorliegen. Das interessierende Ereignis (und dessen Gegenereignis) lauten folglich:

E: Am Ende liegt ein einziger (großer) Ring vor
$\overline{E}$: Am Ende liegen mehrere (kleine) Ringe vor

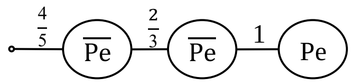
Intuitiv denkt man, dass sich für $\overline{E}$ deutlich mehr Verknotungsmöglichkeiten als für E ergeben. Beim Nachzählen wird man jedoch eines Besseren belehrt. Bei 3, 4 und 5 Schnüren ergeben sich jeweils fast gleich viele Möglichkeiten:

$P_3(E)=0{,}533..$ | $P_4(E)=0{,}457..$ | $P_5(E)=0{,}406..$.

P_3(E) bestimmen

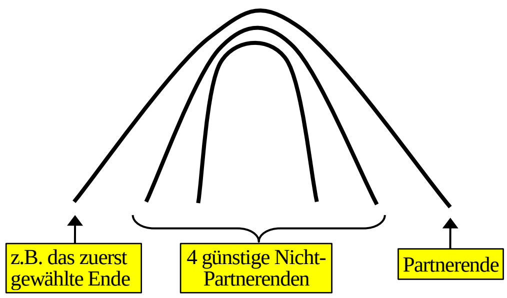
Mit Hilfe des Begriffs *Partnerende* lässt sich das interessierende Ereignis *E* so formulieren, dass man direkt erkennen kann, dass unsere Intuition in die Irre führt: Zu jedem Schnurende existiert genau ein Partnerende, nämlich das am anderen Ende der Schnur. (Sind 2 Schnüre bereits miteinander verknotet, so wurden 2 Enden quasi entfernt und das zugehörige Partnerende befindet sich jenseits des gemeinsamen Knotens.) Vorzeitige, kleine Ringe entstehen nur dann, wenn das *zweite* gegriffene Schnurende just das Partnerende des *zuerst* gegriffenen Endes ist. Das bedeutet, dass von allen in Frage kommenden *zweiten* Schnurenden nur *ein einziges* zu einer vorzeitigen Ringbildung führt und deshalb gemieden werden muss. Bei *allen übrigen* bleibt der Weg zum großen Ring, also zum Ereignis E, offen. Damit lässt sich das interessierende Ereignis E präziser formulieren und die gesuchte Wahrscheinlichkeit – etwa bei 3 Schnüren – direkt berechnen:

E: Es kommt zu keiner vorzeitigen Ringbildung, d.h. man erhält (außer am Schluss) nie das Partnerende des zuerst gegriffenen Schnurendes



$$P_3(E) = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = 0{,}53\overline{3}$$

Die Situation stellt sich vor der ersten Verknotung der 3 Schnüre somit folgendermaßen dar:



Zu *jedem* Schnurende, das als erstes gewählt wird, gibt es 5 mögliche Zweit-Enden. Davon ist jedoch nur eines das zugehörige Partnerende, das gemieden werden muss. Die Wahrscheinlichkeit, *nicht* an dieses Partnerende zu geraten ($\overline{\text{Pe}}$) und damit den vorzeitigen Ringschluss zu verhindern, beträgt 4/5. Bei der zweiten Verknotung liegen nur noch 4 lose

[1] Die Autoren sind auf das hier vorgestellte Orakel in Wittmann (2001) gestoßen, wo ausschließlich ein Orakel mit drei Schnüren betrachtet wird. In Engel (1973) wird dasselbe Problem unter dem Titel "Die Heiratschancen der Mädchen in Anchurien" behandelt. Es werden sogar drei Varianten betrachtet, von welchen das hier vorgestellte Orakel eine ist. Die Rechnungen und Argumente werden dort größtenteils nicht ausgeführt.

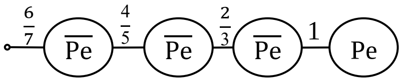
Schnurenden vor. Nachdem eines davon zufällig gewählt worden ist, gerät man mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 erneut an ein Nicht-Partnerende. Für die 3. und letzte Verknotung stehen nur noch 2 Schnurenden zur Verfügung, die mit 100%-iger Wahrscheinlichkeit dann zum großen Ring verknotet werden.

Lässt sich eine Formel angeben, mit der sich direkt die Wahrscheinlichkeit $P_n(E)$ bei n Schnüren bestimmen lässt?

$P_n(E)$ – mit offener Formel

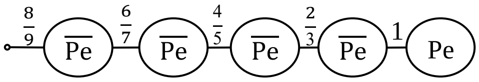
Bei 4 und 5 Schnüren liegen zu Beginn insgesamt 8 bzw. 10 lose Schnurenden vor. Für $P_4(E)$ und $P_5(E)$ ergibt sich analog zu oben:

E: Man erhält nur zum Schluss das Partnerende (n=4)



$$P_4(E) = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 0{,}457 \ldots$$

E: Man erhält nur zum Schluss das Partnerende (n=5)



$$P_5(E) = \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 0{,}406 \ldots$$

Die nachfolgende Wahrscheinlichkeit lässt sich also mit der vorherigen bestimmen:

$$P_4(E) = \frac{6}{7} \cdot P_3(E)$$

$$P_5(E) = \frac{8}{9} \cdot P_4(E)$$

$$P_n(E) = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot P_{n-1}(E)$$

Somit ergibt sich für $P_n(E)$ folgende offene Berechnungsformel (einmal in "Pünktchenschreibweise" und einmal mit dem Produktzeichen):

$$P_n(E) = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$P_n(E) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{2j}{2j+1}$$

Das Produktzeichen lässt diese offene Formel handlich erscheinen, in Wirklichkeit ist sie aber unpraktisch. Denn wir haben es hier nach wie vor mit (n–1) Faktoren zu tun, die wir bei einer konkreten Berechnung alle einzeln (z.B. in den Taschenrechner) eingeben müssten.

$P_n(E)$ – mit geschlossener Formel

Wie gelangt man zu einer geschlossenen Formel, bei der nicht mehr (n–1) Faktoren einzeln eingegeben werden müssen, mit der die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten also schneller ermittelt werden können? Anhand der Pünktchenschreibweise und auch anhand der Schreibweise mit dem Produktzeichen lässt sich vermuten, dass hier die Fakultätsfunktion evtl. weiterhelfen kann:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j$$

Herleitung anhand eines Beispiels

Bevor wir uns dazu an den allgemeinen offenen Ausdruck $P_n(E)$ wagen, versuchen wir zuerst das übersichtlichere $P_5(E)$ in Fakultätsschreibweise zu überführen:

$$P_5(E) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{2^4 \cdot 4!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$$

Im Nenner lassen sich die fehlenden Fakultätsfaktoren durch Erweitern einfügen:

$$P_5(E) = \frac{2^4 \cdot 4!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{2^4 \cdot 4! \cdot 2^4 \cdot 4!}{9!} = 2^8 \cdot \frac{4! \cdot 4!}{9!}$$

Wir hätten dieselbe Rechnung auch für ein beliebiges *n* anstelle von *5* durchführen können. Die allgemeine geschlossene Formel lautet folglich:

$$P_n(E) = 2^{2n-2} \cdot \frac{(n-1)! \cdot (n-1)!}{(2n-1)!}$$

Allgemeine Herleitung

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$P_n(E) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{2j}{2j+1}$$

$$= \frac{2^{n-1} \cdot (n-1)!}{\prod_{j=1}^{n-1}(2j+1)}$$

$$= \frac{2^{n-1} \cdot (n-1)!}{\prod_{j=1}^{n-1}(2j+1)} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(2j+1)}{\prod_{j=1}^{n-1}(2j+1)}$$

$$= \frac{2^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)!}{(2n-1)!}$$

$$= \frac{2^{2n-2} \cdot (n-1)! \cdot (n-1)!}{(2n-1)!}$$

Diskussion

Die hergeleitete Formel stellt einen griffigen, geschlossenen Ausdruck für $P_n(E)$ dar. Für eine konkrete Berechnung (z.B. mit dem Taschenrechner) müssen nicht mehr alle Faktoren eingegeben werden, sondern lediglich die entsprechenden Fakultäten. Der Versuch z.B. $P_{100}(E)$ auf diese Weise zu berechnen, scheitert allerdings, da der Taschenrechner bereits mit 70! überfordert ist. Dies ist nicht verwunderlich, denn das Produkt ist in der geschlossen Formel nicht verschwunden, sondern ledig durch eine

Notation (Fakultät) abgekürzt ausgedrückt.

Weitere Anstrengungen, den *exakten* Wert von $P_n(E)$ für große n schnell zu bestimmen, sind wenig Erfolg versprechend. Wir müssen daher auf die *näherungsweise* Berechnung ausweichen. Gleichzeitig lässt sich über diesen Weg auch ein Eindruck über das Wachstumsverhalten von $P_n(E)$ erhalten.

$P_n(E)$ – mit Näherungsformel

Im Gegensatz zum nachfolgenden Kapitel, beginnen wir die Suche einer Näherungsformel hier mit der *offenen* Formel. Mit Hilfe des Logarithmus wandeln wir das Produkt in eine Summe von Logarithmen um und schätzen dies im Weiteren mit zwei Standard-Näherungsverfahren ab:

$$\begin{aligned}\ln(\mathrm{P_n(E)}) &= \ln\left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{2j}{2j+1}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(\frac{2j}{2j+1}\right)\\ &= -\sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(\frac{2j+1}{2j}\right) = -\sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{2j}\right)\\ &\approx -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\\ &\approx -\frac{1}{2}\ln(n-1)\end{aligned}$$

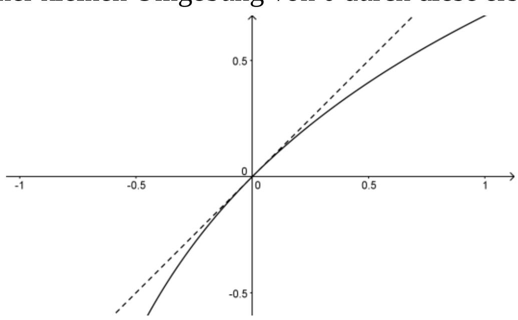
$$\Rightarrow P_n(E) \approx e^{-\frac{1}{2}\ln(n-1)}$$

Somit erhalten wir als erstaunlich einfache Näherung:

$$\boxed{P_n(E) \approx \frac{1}{\sqrt{n-1}}}$$

Erläuterungen

- Nachdem zu Beginn beide Seiten logarithmiert werden, lässt sich das Produkt in der 1. Zeile in eine Summe m. H. der 1. Logarithmusregel überführen:
  $$ln(a \cdot b) = ln(a) + ln(b) \qquad für\ a, b > 0$$
- In der 2. (und auch in der letzten) Zeile wird die 2. Logarithmusregel angewendet:
  $$ln\frac{a}{b} = ln\left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = -ln\frac{b}{a} \qquad für\ a, b > 0$$
- Da die Funktion $x \longrightarrow ln(1+x)$ an der Stelle 0 die Tangentengleichung $x \longrightarrow x$ besitzt, lässt sie sich in einer kleinen Umgebung von 0 durch diese ersetzt:



Das bedeutet, dass alle Summanden $ln(1+\frac{1}{2j})$ durch $\frac{1}{2j}$ angenähert werden können, da die Brüche $\frac{1}{2j}$ maximal 0,5 betragen. Durch diese Standardnäherung kann der Logarithmus entfernt werden.
- Mit dem zweite Näherungsverfahren lässt sich die Summe $\sum_1^n \frac{1}{j}$ mit dem geschlossenen Ausdruck ln(n) abschätzen:
  $$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \cdot 1 \approx \int_1^{n-1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n-1) - \ln(1) = \ln(n-1)$$
  Die Obersumme entspricht in Etwa dem entsprechenden Integral, und dieses lässt sich mit der zugehörigen Stammfunktion ermitteln.

Vor-/Nachteile dieser ersten Näherungsformel

Nun können wir wirklich einfach ausrechnen (sogar ohne Taschenrechner), wie die Chancen auf die große Liebe ungefähr stehen, wenn das Orakel aus sehr vielen Schnüren besteht. Für ein Orakel mit 101 Schnüren (also 202 losen Enden!) gilt z.B.

$$P_{101}(E) \approx \frac{1}{\sqrt{100}} = 10\%$$

Dieses Ergebnis ist mehr als erstaunlich: Um bei diesem "Riesen-Orakel" einen großen Ring durch Zufall zu erhalten, braucht man im Durchschnitt nur ca. zehn Versuche! Selbst bei einem Orakel mit unvorstellbaren 10.001 Schnüren (also 20.002 losen Enden) besteht noch die reelle Chance von

$$P_{10.001}(E) \approx \frac{1}{\sqrt{10.000}} = 1\%$$

So schön diese Rechnungen von der Hand gehen, müssen wir uns trotzdem eines vor Augen halten: Die Einfachheit geht auf Kosten der Genauigkeit. An zwei Stellen haben wir Näherungen verwendet, ohne uns über die Größe des Fehlers Gedanken zu machen.

Wie grob ist die Näherung?

In der Näherungsformel wird das ≈ verwendet. Wir sind jedoch nicht darauf eingegangen, was es eigentlich aussagen soll. Na klar, wir meinen, dass der Wert auf der linken Seite mit dem auf der rechten Seite bis auf einen gewissen Fehler übereinstimmt. Über dessen Größe wissen wir allerdings nichts. An dieser Stelle verschaffen wir uns einfach anhand konkreter Zahlen einen Eindruck von der Güte der Approximation.

In der Tabelle (s.u.) können die Wahrscheinlichkeiten dieser ersten Näherung verglichen werden mit den exakten, gemäß der offenen Formel bestimmten Werten. Wir sehen, dass die Näherungswerte für kleine n ziemlich schlecht sind und auch für größere n nur einen Eindruck von der Größenordnung liefern können. Selbst für n = 1000 weicht die Approximation um mehr als 10% vom tatsächlichen Ergebnis ab. Das ist wirklich grob.

$P_n(E)$ – mit besserer Näherungsformel

Wir beginnen nun mit der geschlossenen Formel und wenden darauf die Sterling-Näherung[1] für Fakultäten

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$$

an:

$$\begin{aligned}
P_n(E) &= 2^{2n-2} \cdot \frac{(n-1)!\cdot(n-1)!}{(2n-1)!} \\
&= 2^{2n-2} \cdot \frac{(n-1)!\cdot(n-1)!}{(2n-1)!} \cdot \frac{2n}{2n} \\
&= 2^{2n-1} \cdot \frac{(n-1)!\cdot(n)!}{(2n)!} \\
&\sim 2^{2n-1} \cdot \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}\cdot(n-1)^{n-1}\cdot e^{n-1}\cdot\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi 2n}\cdot(2n)^{2n}\cdot e^{-2n}} \\
&= \frac{2^{2n-1}}{2^{2n}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}\cdot\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi 2n}} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}n^n}{n^{2n}} \cdot e \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi(n-1)}}{1} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \cdot e \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi(n-1)}}{1} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \cdot e \cdot \frac{n-1}{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi(n-1)}}{n-1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot e \\
&\sim \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n-1}} \cdot e^{-1} \cdot e
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\boxed{P_n(E) \sim 0{,}5\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}}}$$

Erläuterungen

- In der letzten Zeile ist eine – neben der Sterling-Formel – weitere Näherung verwendet worden. Bekanntermaßen gilt:

  $$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

  und somit:

  $$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

- Um mit dieser Näherung arbeiten zu können, wird im Nenner ein *n* benötigt, was in der 2. Zeile durch die Erweiterung mit *2n* sichergestellt wurde.

Diskussion

Zunächst ist auffällig, dass sich die beiden Näherungsformeln nur um den Faktor $0{,}5\sqrt{\pi} \approx 0{,}88$ unterscheiden. Wir hatten also bereits bei der groben, ersten Näherung die korrekte Größenordnung des Wachstums richtig erfasst. Durch die neue Näherung konnte die Güte der Approximation jedoch deutlich verbessert werden:

n	$P_n(E)$		
	exakt	$\frac{1}{\sqrt{n-1}}$	$\frac{0{,}5\sqrt{\pi}}{\sqrt{n-1}}$
3	0,533..	0,707..	0,626..
4	0,457..	0,577..	0,511..
5	0,406..	0,500	0,443..
50	0,125..	0,142..	0,126..
100	0,088..	0,100..	0,089..
1000	0,028..	0,031..	0,028..

Abschlussbemerkung

Das vorgestellte Orakel eignet sich in besonderem Maße für den Einsatz in Schule und Universität, da es ein breites Spektrum von Anspruchsniveaus bereithält. Das Ausgangsproblem ist auch für jüngere Schüler verständlich und kann mit Hilfe eines Baumdiagramms ohne weitere Begriffe gelöst werden. Die Rückschau[2] wirft die Frage nach einer Verallgemeinerung auf mehr als drei Schnüre in natürlicher Weise auf. Ab hier kann "beliebig weit" mit den Lernenden gegangen werden. Das Thema wurde im Rahmen einer Schülerakademie bereits mit Schülern aus den Klassen 8 bis 13 mit viel Freude auf beiden Seiten durchgeführt.

Literatur

Engel, A. (1973): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2008): Mathematisch denken. München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag.

Wittmann, J. (2001). Mathematische Tricks und Basteleien. Köln: Aulis erlag Deubner.

[1] Diese Näherung ist seit 1730 bekannt. Das Zeichen ~ ist (im Gegensatz zu ≈ weiter oben) genau definiert. Und zwar bedeutet $a_n \sim b_n$, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$; in unserem Fall also $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}} = 1$.

[2] Es sollte ein Ziel des Mathematikunterrichts sein, den Schülern zu vermitteln, ein erfolgreich behandeltes Problem stets dahingehend zu reflektieren, welche weiterführenden Fragen sich aus der Lösung ergeben. Der Lehrer muss seine Schüler für solche Fragen sensibilisieren und sie ermutigen, diese zu stellen. In Mason et al. (2008) wird dies unter dem Begriff *Rückschau* als eine von drei Phasen des Problemlösens beschrieben. Ursprünglich stammt die Zerlegung des Problemlöseprozesses in Teilschritte von Polya