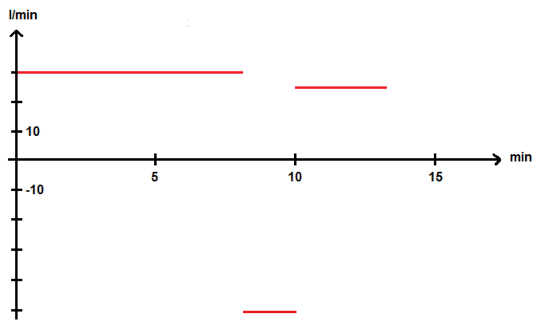
Änderungsrate und Gesamtmenge entsprechen Steigung und Fläche

1 In eine Badewanne wird gleichmäßig Wasser eingelassen (30 l /min). Nach 8 Minuten wird das Wasser abgedreht und aus Versehen der Stöpsel gezogen und es fließen für 2 Minute gleichmäßig 50 l /min ab. Um die Wanne wieder zu füllen, wird der Abfluss gesperrt und der Zufluss etwas geöffnet, so dass gleichmäßig für 3 Minuten 25 l /min zufließen.

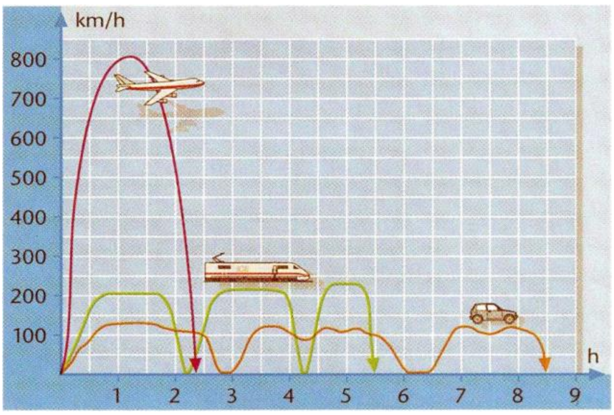


a) Wie viel Liter Wasser sind am Ende insg. in der Wanne?

b) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für obige Änderungsrate und für die unter a) ermittelte Gesamtmenge zum Zeitpunkt t auf.

c) Wofür steht in diesem Sachzusammenhang das „c" in der Stammfunktion?

d) Wieso müssen die Flächen oberhalb der x-Achse addiert und die unterhalb subtrahiert werden?



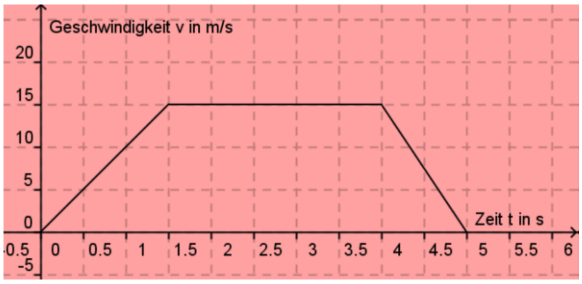
2 Das vorherige Bild zeigt die momentanen Geschwindigkeiten dreier Verkehrsmittel auf ihrem Weg von München nach Hamburg.

a) Bestimmen Sie näherungsweise die Strecken, welche die drei Verkehrsmittel jeweils zurückgelegt haben.

b) Berechnen Sie damit näherungsweise die Durchschnittsgeschwindigkeiten der Verkehrsmittel (inklusive Pausen).

c) An welchen Orten könnte das Auto eine Pause eingelegt haben?

3 Eine Seifenkiste fährt bergab, anschließend bewegt sie sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Waagerechten, bevor sie bergauf bis zum Stillstand rollt. (Die Abb. zeigt das v-t-Diagramm).



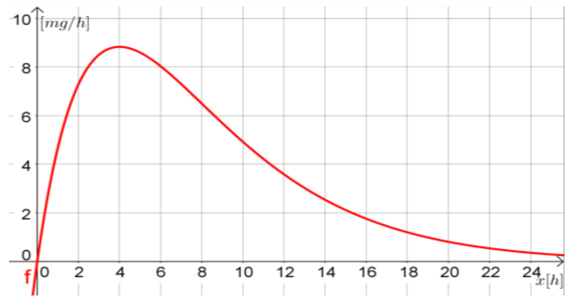
a) Skizzieren Sie ein entsprechendes s-t-Diagramm.

b) Welcher Weg wurde insgesamt zurückgelegt?

c) Wie lauten die Gleichungen für s und v?

d) Erklären Sie anschaulich, *warum* der Gesamtweg s genau der Fläche unter v entsprechen muss.

4 Die Funktion $f_a(t)=a\cdot t\cdot e^{-0{,}25t}$ $(a>0)$ beschreibt die Änderungsrate des Wirkstoffs im Blut eines Patienten nach Verabreichung eines Medikaments (s. Abb.).

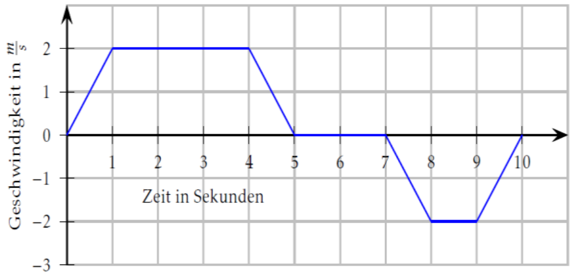


a) Gesundheitsgefährdungen können ab einer Änderungsrate von 14 mg/h eintreten. Welche Dosierungshöhe a darf demnach nicht überschritten werden?

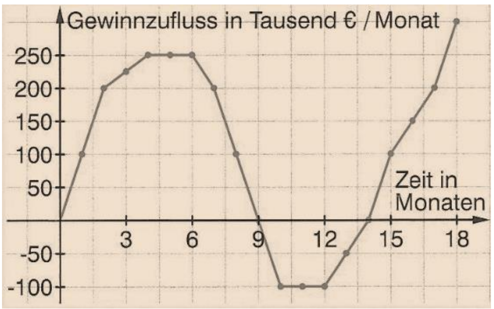
b) Wann wird das Medikament am stärksten abgebaut?

c) Welche Wirkstoffmenge hat der Patient nach 24 Stunden insgesamt aufgenommen (für a = 6)? Bestimmen Sie auch die mittlere Änderungsrate in dieser Zeit.

5 Der unten abgebildete Funktionsgraph zeigt die Geschwindigkeit eines Aufzugs. a) In welcher Höhe befindet sich der Aufzug nach 10 Sekunden? b) Skizzieren Sie einen möglichen h-t-Graph.



6 Die monatliche Gewinnrate einer Firma ist im Diagramm abgebildet. Bestimmen Sie den Gesamtgewinn der Firma näherungsweise.



7 *Änderungsraten und Gesamtmengen erkennen.*

Gesamtmenge (Fläche)	Änderungsrate (Steigung)
Wassermenge [l]	Zuflussrate [l/std.]
Schadstoffmenge [g]	Schadstoffrate [g/min]
zurückgelegter Weg [m]	Geschwindigkeit [m/s]
Geschwindigkeit [m/s]	Beschleunigung [m/s²]
Bestand [Anzahl]	Wachstum [Anzahl/Stunde]
Warenkorb-Wert [€]	Inflationsrate [€/Jahr]
Zerfälle [Anzahl]	Radioaktivität [Zerfälle/s] [Bq]
Ladungsmenge [C]	Stromstärke [C/s] [A]
Energie [J]	Leistung [J/s] [W]
Energie [J]	Kraft [J/m] [N]
Energie [J]	Spannung [J/C] [V]
Kreisfläche [m²]	Kreisumfang [m²/m]

a) Woran kann man erkennen, ob es sich bei einer gegebenen Größe um eine Änderungsrate handelt?
b) Nennen Sie 3 reale Probleme, bei denen die Änderungsrate gemessen und daraus die Gesamtmenge erschlossen wird.
c) Nennen Sie 3 reale Probleme, bei denen umgekehrt die Gesamtmenge gemessen und daraus die Änderungsrate erschlossen wird.

8 Die Kraft, die die Erde auf eine 2000 t Rakete ausübt, verändert sich mit dem Abstand zum Erdmittelpunkt s nach folgender Gesetzmäßigkeit:
$F(s)=2\cdot10^6\cdot9{,}81\cdot(6{,}37\cdot10^6)^2 \cdot s^{-2}$ [J/m]. Wie viel Energie wird benötigt, um die Rakete in eine 240 km hohe Umlaufbahn zu befördern? Wie viele Menschen könnten mit dieser Energie 10 Jahre lang ernährt werden?

1) a) V = 30·8 – 50·2 + 25·3 + c = 215 + c

b) $f(x)=\begin{cases}30\\-50\\25\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}30x+c\\-50x+c\\25x+c\end{cases}$

c) Bei konstanten Zuflüssen erkennt man unmittelbar, dass der orientierte Flächeninhalt zum gesamten Wasservolumen der Badewanne führt. Die Flächen oberhalb der x-Achse beschreiben das zugeflossene Volumen und müssen addiert werden, die Fläche unterhalb der x-Achse das abgeflossene Volumen und muss subtrahiert werden. Die Konstante c in der Stammfunktion beschreibt, wie viel Liter Wasser *vor* dem betrachteten Zeitpunkt 0 schon in der Wanne war.

2) a) $F_F(2{,}4) \approx$ 54 Kästchen ≙1350 km; $F_Z(5{,}5) \approx$35K ≙875 km;
$F_A(8{,}5) \approx$ 30K ≙ 750 km b) 1350/2,4; 875/5,5; 750/8,5
c) nach ca. 11 K ≙ 275 km (evtl. Würzburg) und
nach weiteren 275 km (evtl. Göttingen)
3) a) steigende Parabel u. Gerade, fallende Parabel, vgl. c)
b) s=0,5·1,5·15+2,5·15+0,5·1·15= 56,25 + c

c) $v(t)=\begin{cases}10t\\15\\-15t\end{cases}$; $s(t)=\begin{cases}5t^2+c\\15t+c\\-7{,}5t^2+c\end{cases}$

d) Bei konstantem v ist klar, dass für den zurückgelegten Weg s = v·t gilt, s also der Rechteckfläche unter v entspricht. Bei nicht-konstantem v stellt man sich vor, dass sich v aus winzigen konstanten Abschnitten zusammensetzen würde. s ergäbe sich dann aus der Summe vieler schmaler Rechteckflächen unterhalb von v. Anhand dieser Vorstellung wird deutlich, dass auch bei nicht-konstantem v, der zurückgelegte Weg s ebenfalls der Fläche unter v entsprechen muss.

4) a) $y' = ae^{-t/4}(1-t/4)$; $H(4|4ae^{-1})$; a≤9,52 Einheiten
b) $y''=0{,}25ae^{-t/4}(t/4-2)$; W(8|…); nach 8 Stunden
c) $Y = -4ae^{-t/4}(t-4)+c$; $\int_0^{24} f_6\,dx \approx 94{,}33\,mg$; $\mu = \frac{1}{24}\int_0^{24} f_6 \approx 3{,}94\,\frac{mg}{h}$

5) a) 0,5·8·2 – 0,5·4·2 = 4 m + c (es kommt darauf an, in welcher Höhe der Aufzug zum Zeitpunkt 0 stand)
b) in den ersten 5 Sek.: steigende Parabel, Gerade, Parabel

6) Kästchen: 21–4,5+8,5 = 25 ≙ 25*1,5*50 + c = 1875 € + c

7) a) die Einheiten sind Quotienten (bei Becquerel, Amper, Watt, Newton nicht direkt erkennbar) b) Pegelmessung an Flüssen, Schadstoffmessung in Schornsteinen, Abflussmengen des Sees eines Pumpkraftwerks c) Wachstumsraten von Bakterien werden über Gezahlmessungen bestimmt, Inflationsraten werden über den Gesamtpreis des Warenkorbs ermittelt, Geschwindigkeiten werden in Radarfallen über den gesamten zurückgelegten Weg pro Zeitabschnitt bestimmt, die Radioaktivität wird über die Gesamtzahl der Zerfälle bestimmt.

8) $4{,}54\cdot10^{12}$J (Integrationsgrenzen: $6{,}37\cdot10^6$m und $6{,}61\cdot10^6$m);
pro Tag benötigt ein Mensch ca. 10,8 MJ (= 3 kWh).

9) a) *enthält*: nur x | x und y | x, y und y′; x steht für ges. Zahl bzw. ∞ viele Zahlen; *Ziel*: x herausfinden, bzw. Gesetzmäßigkeit herausfinden
b) s. Abb.; y′ wird durch Integrieren entfernt c) enthält neben x und y noch y′ oder y′′ d) $y'=2y+3x \leftrightarrow f'(x)=2\cdot f(x)+3x \leftrightarrow \frac{dy}{dx}=2y+3x$
e) $y'=2x \leftrightarrow \frac{dy}{dx}=2x$; $Y=3x^2+c \leftrightarrow \int 6x\,dx=[3x^2+c]$
f) Im Schulbereich arbeitet man nur mit 1 unabhängigen Variablen (x), man weiß so automatisch, dass bei y′ nach x abgeleitet und bei Y nach x integriert werden muss. Im Hochschulbereich abreitet man jedoch mit mehreren unabh. Variablen. Folglich muss dort immer angegeben werden, nach welcher differenziert bzw. integriert werden soll, z.B. $\frac{d}{dy}(4x^2y-4xy^2+3x)$ oder $\int(4x^2y-4xy^2+3x)\,dy$ g) Grenzwerte

12) Ziel: y′ durch Integration entfernen.

13) a) Wachstum überall gleich; Wachstum ~ Bestand; Wachstum ~ Restbestand (c-N); Wachstum ~ Bestand und Restbestand.
b) logist. Wachstum; c = Endbestand; a, b mit 2 Messungen best.
c) U = A′ = dA/dr; Ringfläche durch Ringhöhe=Grundseite=Umfang
d) O = V′ = dV/dr; Kugelschale durch Schalenhöhe=Grundfläche
e) $p'=2\cdot p \Rightarrow p = a\cdot e^{2x}$; a lässt sich z.B. mit p(0) bestimmen.
f) $p'=a\cdot(g-p)$; $p=a\cdot e^{-gt}+c$ g) N′~N; $N=a\cdot e^{bt}$; z.B. N(0), N(10) best.

Differentialgleichungen

9 Grundlagen

a) Was sind die Unterschiede zwischen einer Algebra-, einer Funktions- und einer Differentialgleichung?

b) Wie haben wir bisher Fgl. gefunden und wie gelingt das nun mit Hilfe von Dgl.?

Algebra	Analysis
$3x^2 + 9x - 30 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ Algebragl. $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $x = 2$ oder $x = -5$	messen → Tabelle/Graph → LGS → $y = 3x^2 + 6x - 9$ (Fgl.) theor. Überlegung → $y' = 4y + 3x$ (Dgl.) → $\int$ → $y = 3x^2 + 6x - 9$

c) Was ist eine Dgl.? Wozu stellt man sie auf?

d) Nennen Sie verschiedene Schreibweisen einer Dgl.

e) Nennen Sie verschiedene Schreibweisen bei Ableitungs- und Integralfunktionen.

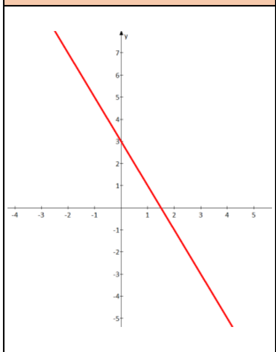
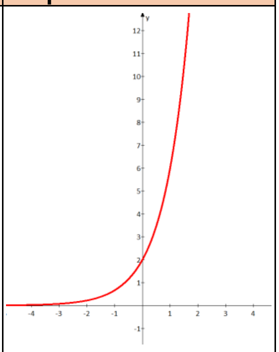
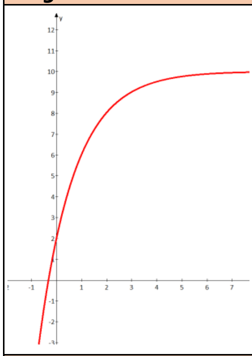
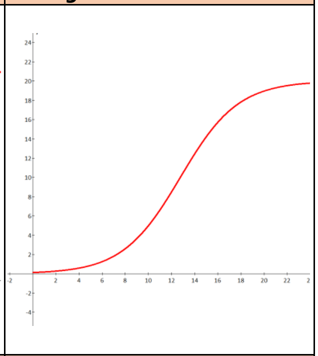
f) Wieso kommt man an der Schule ohne Differentiale aus, an der Hochschule jedoch nicht?

g) Was sind Differentiale?

10 *Einführungsbeispiel*: Beschreiben Sie, wie man die Fgl. des Weg-Zeit-Gesetzes des freien Falls m. H. einer Dgl. finden kann (in Schul- und Hochschulschreibweise, also einmal mit und einmal ohne Strichschreibweise).

$v \sim t$	$v \sim t$
$\Rightarrow s' \sim t$	$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = k \cdot t$
$\Rightarrow s' = k \cdot t \quad \vert \int \mathbf{dt}$	$\Leftrightarrow ds = k \cdot t\, dt \quad \vert \int$
$\Leftrightarrow \int s'\, dt = \int kt\, dt$	$\Leftrightarrow \int 1 \cdot ds = \int kt\, dt$
$\Leftrightarrow [s + c_1] = [0{,}5kt^2 + c_2]$	$\Leftrightarrow [s + c_1] = [0{,}5kt^2 + c_2]$
$\Leftrightarrow s = 0{,}5kt^2 + c_3$	$\Leftrightarrow s = 0{,}5kt^2 + c_3$

11 Nennen Sie zu den folgenden vier wichtigen Wachstums-/Abbaufunktionen jeweils Name, Fgl., Dgl. und einen möglichen Anwendungsfall.

lineares Wachstum	exponentielles Wachst.	begrenztes Wachstum	logistisches Wachstum
			
$y = ax + b$ $y' = a$	$y = a \cdot e^{b \cdot x}$ $y' = b \cdot y$	$y = a \cdot e^{-b \cdot x} + c$ $y' = b \cdot (c - y)$	$y = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-bcx}}$ $y' = b \cdot y \cdot (c - y)$
Abbau von Alkohol im Blut	Wachstum bei unbegr. Ressourcen	Wachstum bei begrenzten Ressourcen	Wachstum bei unbegr. und begrenzten Ressourcen

12 Dgl. lösen *(Trennen der Variablen)*

Erläutern Sie anhand der unteren 4 Beispiele, wie man von der Dgl. zu Fgl. kommt.

Dgl. (ohne y)

$y' = 8x - 5 \quad \vert \int dx$

$\Leftrightarrow y + c_1 = 4x^2 - 5x + c_2$

$\Leftrightarrow y = 4x^2 - 5x + c_3$

Dgl. (begrenztes Wachstum)

$y' = a \cdot (b - y)$

$\Leftrightarrow (b - y)^{-1} \cdot y' = a \quad \vert \int dx$

$\Leftrightarrow \ln(b - y) + c_1 = -ax + c_2$

$\Leftrightarrow \ln(b - y) = -ax + c_3$

$\Leftrightarrow b - y = e^{-ax + c_3}$

$\Leftrightarrow y = -e^{c_3} \cdot e^{-ax} + b$

$\Rightarrow y = k \cdot e^{-ax} + b$

Dgl. (exponentielles Wachst.)

$y' = 4y$

$\Leftrightarrow (y)^{-1} \cdot y' = 4 \quad \vert \int dx$

$\Leftrightarrow \ln y + c_1 = 4x + c_2$

$\Leftrightarrow \ln y = 4x + c_3$

$\Leftrightarrow y = e^{4x + c_3}$

$\Rightarrow y = k \cdot e^{4x}$

Dgl. (logistisches Wachst.)

$y' = 2 \cdot y \cdot (3 - y)$

$\Leftrightarrow y' \cdot \frac{1}{y(3 - y)} = 2$

$\Leftrightarrow y' \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{3 - y}\right) = 2$

$\Leftrightarrow y' \cdot y^{-1} + y' \cdot (3 - y)^{-1} = 6 \quad \vert \int dx$

$\Leftrightarrow \ln(y) - \ln(3 - y) = 6x + c_3$

$\Leftrightarrow \ln \frac{y}{3 - y} = 6x + c_3$

$\Leftrightarrow \frac{y}{3 - y} = e^{6x + c_3}$

$\Leftrightarrow y = 3 \cdot e^{6x + c_3} - y \cdot e^{6x + c_3}$

$\Leftrightarrow y(1 + e^{6x + c_3}) = 3 \cdot e^{6x + c_3}$

$\Leftrightarrow y = \frac{3 \cdot e^{6x + c_3}}{1 + e^{6x + c_3}}$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{1 + e^{-6x - c_3}}$

$\Rightarrow y = \frac{3}{1 + k \cdot e^{-2 \cdot 3 \cdot x}}$

13 Dgl. durch theor. Überlegungen erschließen.

Nachdem wir nun wissen, wie man aus einer Dgl. die begehrte Fgl. erhält, bleibt noch die Frage, woher wir die Dgl. kennen, d.h. wie lässt sich eine Dgl. durch theoretische Überlegungen erschließen?

a) Wie lassen sich die Dgl. beim linearen, exponentiellen, begrenzten und logistischen Wachstum erschließen?

b) Sie wollen die Anzahl N der **Bakterien** auf dem Nährboden einer Petrischale vorhersagen. Sie suchen also die Fgl. N(t). Wie können Sie durch theoret. Überlegungen zur entsprechenden Dgl. und dann zur Fgl. gelangen?

c) Nachdem bewiesen war, dass sich die Fläche eines Kreises exakt mit $A=\pi\cdot r^2$ berechnen lässt, ließ sich die Fgl. für den **Umfang** schnell m. H. einer Dgl. ermitteln. Wie?

d) Nachdem bewiesen war, dass sich das Volumen einer Kugel exakt mit $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ berechnen lässt, ließ sich die Fgl. für die **Oberfläche** schnell m. H. einer Dgl. ermitteln. Wie?

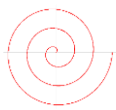
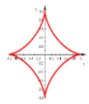
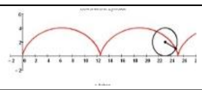
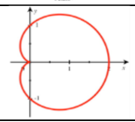
e) Eine Kolonie **Erkältungsbakterien** verdoppelt sich alle 2 Stunden. Geben Sie eine Dgl. und deren Lösung an.

f) Angenommen, Sie beherrschten die **Schulmathematik** zu 100%, p(0)=100. Nach dem Abitur werden sie manche Inhalte vergessen, einen Grundanteil g jedoch ihr Leben lang (90 Jahre) behalten, p(90)=g. Wann wird die Vergessensrate p' am größten, wann am kleinsten sein; wovon wird sie also proportional abhängen? Stellen Sie eine Dgl. auf und lösen Sie diese.

g) Sie interessieren sich für die Fgl., die Ihnen die Anzahl N der noch nicht zerfallenen Atome eines **radioaktiven Stoffes** pro Zeit t angibt. Wie lautet wahrscheinlich die Dgl., wie die Fgl. und wie bestimmt man deren Parameter?

Koordinaten-/Parameter-/Polargleichung

Vom Funktionsgraph zur Kurve

Objekt	**Koordinatengleichung** in expliziter oder impliziter Form	**Parametergleichung** in Punkt- und Vektorform		Polargleichung
Gerade	g: y = 2x – 3	P(t|2t-3|0)	g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$	
Ebene	E: 2x+3y-3z = 5	P(1+3t|1+t-s|-3t-s)	E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$	
Parabel	f: $y = 2x^2 + 3x - 1$	P(t|$2t^2+3t-1$|0)	f: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\2t^2+3t\\0\end{pmatrix}$	
Hyperbel	f: $y= 3x^{-1} - 5$	P(t|$3t^{-1}-5$|0)	f: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\3t^{-1}\\0\end{pmatrix}$	
Sinusgraph	f: y = 2·sin x +5	P(t|2sin t +5|0)	f: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\2\cdot\sin t\\0\end{pmatrix}$	
Ortskurve	f: $y = 5x^2$	H(0,2t|$0{,}2t^2$)	f: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}2t\\0{,}2t^2\\0\end{pmatrix}$	
Kreis (Schar)	k_a: $x^2 + y^2 = a^2$	P(a· cos t |a· sin t|0)	k_a: $\vec{x}=\begin{pmatrix}a\cos t\\a\sin t\\0\end{pmatrix}$	
Ellipse (Schar)	$k_{a,b}$: $a^2x^2+b^2y^2 = a^2b^2$	P(a· cos t |s· sin t|0)	$k_{a,b}$: $\vec{x}=\begin{pmatrix}a\cos t\\b\sin t\\0\end{pmatrix}$	
Spirale (Schar)	k_a: $x^2 + y^2 = a^2\cdot\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2$		k_a: $\vec{x}=\begin{pmatrix}a\cdot t\cdot\cos t\\a\cdot t\cdot\sin t\\0\end{pmatrix}$	r = φ $r = \varphi^{-1}$ $r = e^{\varphi}$
Astroide (Schar)	k_a: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$		k_a: $\vec{x}=\begin{pmatrix}a\cdot(\cos t)^3\\a\cdot(\sin t)^3\\0\end{pmatrix}$	r = 2·cos(4φ) r^2 = 2·cos(2φ)
Zykloide (Schar)	k_a: $x=a\cos^{-1}\left(\frac{a-y}{a}\right)-\sqrt{y(2a-y)}$		k_a: $\vec{x}=\begin{pmatrix}a\cdot(t-\sin t)\\a\cdot(1-\cos t)\\0\end{pmatrix}$	
Kardioide (Schar)	k_a: $(x^2+y^2)^2+4ax(x^2+y^2)-4a^2y^2=0$		k_a: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2a\cos t\cdot(1-\cos t)\\2a\sin t\cdot(1-\cos t)\\0\end{pmatrix}$	r = a·(1-cos φ)
Fkt.-Graph (im Raum)	f: z = 0,5·cos(2xy)	P(t|s|0,5cos(2ts))	f: $\vec{x}=\begin{pmatrix}t\\s\\0{,}5\cos(2ts)\end{pmatrix}$	
Kugel	k: $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=19$	P(… | … | …)	k_a: $\vec{x}=\begin{pmatrix}a\cdot\sin t\cdot\cos s\\a\cdot\sin t\cdot\sin s\\a\cdot\cos t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	