Empfehlungen zur Kombinatorik

STEFAN BARTZ, MECKEL

Zusammenfassung*: Gründet ein Stochastiklehrgang stark auf der Laplace-Wahrscheinlichkeit, müssen häufig interessierende und mögliche Ausgänge abgezählt werden. Die Kombinatorik muss in einem solchen Lehrgang zwangsläufig eine tragende und zentrale Rolle spielen. Wird der Lehrgang dagegen auf Baumdiagramme – also auf den Ansatz, Ereignisse generell in einzelne Schritte zu zerlegen – gegründet, kann die Behandlung kombinatorischer Verfahren in den Hintergrund treten.*
Anhand des Spiel 77 und basierend auf dem sehr hilfreichen Artikel von Althoff (2012) können die spezifischen Eigenarten beider Ansätze gut miteinander verglichen und Empfehlungen für die Behandlung der Kombinatorik innerhalb eines schulischen Stochastiklehrgangs abgeleitet werden.

Das Spiel 77

Ich erhalte einen entsprechenden Gewinn, wenn 1, 2, …, 7 Endziffern meines Lottoscheins mit denen der gezogenen 7-stelligen Zahl übereinstimmen.

Die Wahrscheinlichkeiten[1] für die einzelnen Gewinnklassen sind schnell notiert:

richtige Endziffern	Wahrscheinlichkeit	Gewinn in €
1	$1/10^1$	5
2	$1/10^2$	17
3	$1/10^3$	77
4	$1/10^4$	777
5	$1/10^5$	7.777
6	$1/10^6$	77.777
7	$1/10^7$	~1.000.000

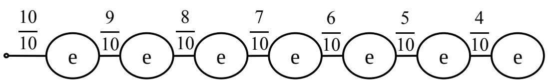
Wie lassen sich jedoch die Wahrscheinlichkeiten ermitteln, dass in der gezogenen Zahl mehrfachvorkommende Ziffern auftreten? Folgende 15 Ereignisse können dabei unterschieden werden:

Ereignisse	z.B. Endziffer
7e	8391652
5e1z	8391658
4e1d	8391688
3e2z	8391683
3e1v	8391888
2e1z1d	8391833
2e1f	8398888
1e3z	8391839
1e1z1v	8398333
1e2d	8398833
1e1se	8388888
2z1d	8398399
1z1f	8383333
1d1v	8388333
1s	8888888

Beim Ereignis *5e1z* kommen in der 7-stelligen Zahl also 5 Ziffern einfach und 1 Ziffer zweifach vor, im Folgenden kurz mit 5 „*Einer*“ und 1 „*Zweier*“ bezeichnet. Beim Ereignis *3e2z* enthält die 7-stellige Zufallszahl 3 „*Einer*“ und 2 „*Zweier*“. Immer jeweils ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

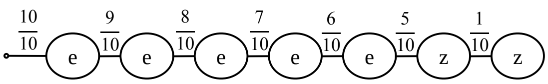
Lösung mit Baumdiagrammen

E: Ich ziehe 7e. *(also 7 Einer)*



$$P(E) = \left(\frac{10}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}\right)\cdot\frac{7!}{7!}$$

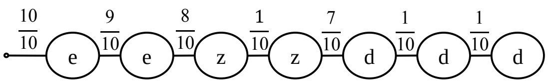
E: Ich ziehe 5e und 1z. *(5 Einer, 1 Zweier)*



$$P(E) = \underbrace{\left(\frac{10}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{10}\right)}_{\text{Wk der interess. Pfade}}\cdot\frac{7!}{5!2!}$$

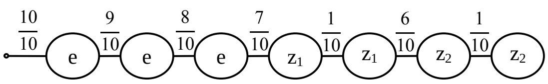
Anzahl der interess. Pfade

E: Ich ziehe 2e, 1z und 1d.



$$P(E) = \left(\frac{10}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{7!}{2!2!3!}$$

E: Ich ziehe 3e und 2z.



$$P(E) = \left(\frac{10}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2!}\right)\cdot\frac{7!}{3!2!2!}$$

Korrekturfaktor

Erläuterungen zum Vorgehen

- Man stellt sich beim Ereignis *E=5e1z* (s.o.) vor, dass man z.B. als erstes eine Ziffer zieht, die insgesamt nur einmal vorkommt (Wk 10/10). Als nächstes könnte man erneut einen *Einer* ziehen (Wk 9/10), usw. Beim vorletzten Zug müsste man dann eine Ziffer erhalten, die zum *Zweier* gehört (Wk 5/10) und als letztes dieselbe *Zweier*-Ziffer noch einmal (Wk 1/10). Der sich so ergebene interessierende Pfad besitzt die Pfadwahrscheinlichkeit $\left(\frac{10}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{10}\right)$.
- Gibt es beim Ereignis *E=5e1z* noch weitere interessierende Pfade? Ja, die beiden „z“ Knoteneinträge

[1] In der Tabelle sind die Wahrscheinlichkeiten für *mindestens* k richtige Endziffern, also $P(X \geq k)$, angegeben. Für *genau* k richtige Endziffern müsste jeweils mit 0,9 multipliziert werden, da die *"k+1"*–te Endziffer dann zusätzlich falsch sein müsste. Etwa im Fall k = 3: $P(X=3) = 0{,}1^3 \cdot 0{,}9$.

müssen nicht am Ende, sondern können auch früher gezogen werden. Insgesamt gibt es $\frac{7!}{5!2!}$ Möglichkeiten, die zwei gleichen „z“ Einträge und die fünf gleichen „e“ Einträge auf 7 Plätzen anzuordnen. Folglich ergeben sich ebenso viele interessierende Pfade, deren Pfadwahrscheinlichkeiten alle addiert werden müssten. Da die einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten jedoch gleich groß sind, genügt es, die Wahrscheinlichkeit *eines* Stellvertreterpfades mit der Anzahl der interessierenden Pfade zu multiplizieren:

$$P(E) = \underbrace{\left(\frac{10}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{10}\right)}_{\text{Wk der interess. Pfade}}\cdot\underbrace{\frac{7!}{5!2!}}_{\text{Anzahl der interess. Pfade}}$$

- Die Aufgabe lässt sich so ohne tiefere Kombinatorik-Kenntnisse alleine mit Baumdiagramm und Standardlösungsverfahren (Bartz 2008) anschaulich bewältigen. Bei diesem 3-schrittigen Verfahren wird (1) das interessierende Ereignis E exakt formulieren, (2) alle dazu passenden interessierenden Baumpfade notieren und (3) *P(E)* durch Addition der jeweiligen Pfadwahrscheinlichkeiten ermitteln.
- Ergeben sich im Schritt (2) große Baudiagrammen, sogenannten *Mammutbäumen* (Bartz 2009), versucht man, möglichst viele interessierende Pfade zusammenzufassen. Das gelingt beim obigen Ereignis *5e1z* mit Hilfe der Knoteneinträge "e" und "z", über die sich alle *Einer*- und *Zweier*-Ziffern, die am jeweiligen Knoten möglich sind bündeln lassen. Ebenso ist man bei Mammutbäumen bemüht, möglichst nur einen einzigen Pfad, stellvertretend für alle interessierenden, betrachten zu können. Haben alle interessierenden Pfade die gleiche Pfadwahrscheinlichkeit genügt es, *einen einzigen* Pfad aufzuzeichnen. Anhand dieses Stellvertreters lässt sich meist die Anzahl *aller* Interessierenden schnell bestimmen. Wären beim Ereignis *5e1z* alle 7 Knoteneinträge des Stellvertreterpfades unterschiedlich, würden insgesamt *7!* interessierende Pfade existieren. Da aber je 5 und 2 der Knoteneinträge gleich sind (5-mal "e" und 2-mal "z"), reduziert sich die Zahl der Anordnungsmöglichkeiten um jeweils *5!* und *2!* auf insgesamt $\frac{7!}{5!\cdot 2!}$.
- Wieso muss bei den 4 Ereignissen, bei denen gleich langen Wiederholsequenzen vorkommen (z.B. bei *E = 3e2z*) ein Korrekturfaktor eingefügt werden? Für z_2 sind dann nur Ziffern erlaubt, die größer als die bei z_1 sind. So darf beispielsweise der Fall ($z_1 = 3 \mid z_2 = 4$) nicht gezählt werden da er dem Fall ($z_1 = 4 \mid z_2 = 3$) entspricht. Für z_2 gibt es somit nicht jeweils 6 mögliche Einträge (s. Astwahrscheinlichkeit) sondern nur halb so viele.

Lösung mit Binomialkoeffizienten

E: Ich ziehe 7e.

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \underbrace{\binom{10}{7}}_{|E_{Au}|}\cdot\underbrace{\binom{7}{7}\cdot 7!}_{|E_{An}|}\cdot\underbrace{\frac{1}{10^7}}_{|\Omega|}$$

E: Ich ziehe 5e und 1z.

$$P(E) = \underbrace{\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{1}}_{|E_{Au}|}\cdot\underbrace{\binom{7}{5}\cdot 5!\cdot\binom{2}{2}}_{|E_{An}|}\cdot\underbrace{\frac{1}{10^7}}_{|\Omega|}$$

E: Ich ziehe 2e, 1z und 1d.

$$P(E) = \underbrace{\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{1}}_{|E_{Au}|}\cdot\underbrace{\binom{7}{2}\cdot 2!\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{3}}_{|E_{An}|}\cdot\underbrace{\frac{1}{10^7}}_{|\Omega|}$$

E: Ich ziehe 3e und 2z.

$$P(E) = \underbrace{\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{2}}_{|E_{Au}|}\cdot\underbrace{\binom{7}{3}\cdot 3!\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}}_{|E_{An}|}\cdot\underbrace{\frac{1}{10^7}}_{|\Omega|}$$

Erläuterungen zum Vorgehen

- Da beim Spiel 77 alle gezogenen 7-stelligen Zahlen gleich wahrscheinlich sind, lässt sich P(E) mit $\frac{|E|}{|\Omega|}$, also mit der Anzahl der interessierenden Ausgänge, und der Anzahl aller möglichen bestimmen.
- |E| wird in zwei Schritten ermittelt. Zuerst werden die *Auswahlmöglichkeiten* $|E_{Au}|$ für die 7 Ziffern – ohne Berücksichtigung der Reihenfolge – bestimmt. Dann werden die *Anordnungsmöglichkeiten* $|E_{An}|$ all dieser Zifferkombinationen auf 7 Plätze ermittelt.
- So gibt es beim Ereignis *2e1z1d* insgesamt $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{1} = 2520$ *Auswahlmöglichkeiten*: Zuerst werden die Möglichkeiten berechnet, die 2 *Einer*-Ziffern aus den 10 Kugeln auszuwählen, dann die Möglichkeiten, die *Zweier*-Ziffer aus den verbleibenden 8 Kugeln und schließlich die Dreier-Ziffer aus den übrigen 7 Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen. (Für die restlichen Zweifach- und Dreifach-Ziffern gibt es jeweils $\binom{1}{1}$ Möglichkeiten, sie sind aus Übersichtsgründen nicht aufgeführt.)
- Dann wird berechnet, auf wie viele Arten sich jede dieser 2520 Ziffernkombinationen auf 7 Plätze anordnen lässt: Die 2 *unterschiedlichen* Einfach-Ziffern lassen sich auf $\binom{7}{2}\cdot 2!$ Möglichkeiten auf 7 Plätze anordnen, die beiden *gleichen* Zweifach-Ziffern lassen sich auf $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten auf die verbleibenden 5 Plätze anordnen. Die 3 gleichen Dreifach-Ziffern können schließlich auf alle übrigge-

bliebenen Plätze geschoben werden. Für sie ergeben sich nur noch $\binom{3}{3}$, also *eine* Anordnungsmöglichkeit.

- **Zu beachten:** Binomialkoeffizienten können für Auswahlmöglichkeiten *und* für Anordnungsmöglichkeiten stehen:

  aus 7 *ungleichen* Kugeln 2 ohne Reihenfolge auswählen $\rightarrow \binom{7}{2} \leftarrow$ auf 7 Plätzen 2 *gleiche* Einträge anordnen

  Wichtig ist, dass der Binomialkoeffizient nur dann verwendet wird, wenn tatsächlich *ohne* Reihenfolge und Zurücklegen gezogen wird, bzw. wenn tatsächlich *gleiche* Einträge angeordnet werden. Müssen dagegen 2 *ungleiche* Einträge angeordnet werden, wie oben bei den *2 Einer*-Ziffern, muss der Binomialkoeffizient um den Faktor *2!* ergänzt werden.

Vergleich der Lösungswege

Beim ersten Lösungsweg tauchen im Wesentlichen zwei Schwierigkeiten auf. Man muss beim Bündeln der *Einer*-Knoteneinträge erkennen, dass diese danach nicht mehr unterscheidbar sind und den gleichen Eintragswert „e“ erhalten müssen[1]. Außerdem muss bei 4 der 15 Ereignisse die Notwendigkeit des Korrekturfaktors erfasst werden.

Für den zweiten Lösungsweg müssen die Schüler mit Anordnungs- *und* Auswahlverfahren vertraut sein und beide Modelle im Zusammenspiel achtsam und wohlüberlegt anwenden können. Zudem ist es schwierig zu erkennen, *warum* die Ereignisse in Klassen (*e*, *z*, *d*, …) zerlegt werden müssen. Und schließlich bereitet Schülern die Frage, *wieso* für jede Klasse einzeln, *innerhalb* der Klasse jedoch mit "einem Griff" ausgewählt werden muss, große Probleme. (Warum müssen z. B. die Auswahlmöglichkeiten beim Ereignis *2e1z1d* mit $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{1}$ und nicht mit $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}$, wie beim Ereignis *3e2z* bestimmt werden?).

Der zweite Lösungsweg erfordert recht umfangreiche kombinatorische Kenntnisse. Er eignet sich vor allem, um fortschrittliche Abzähltechniken, etwa im Rahmen eines weiterführenden Kombinatorik-Exkurses (s.u.) zu trainieren.

Dagegen kann der erste Lösungsweg bereits von Anfängern bewältigt werden. Dadurch, dass das interessierende Ereignis anhand eines Baumdiagramms in Einzelschritte zerlegt wird, brauchen keine *Auswahlmöglichkeiten* mehr abgezählt zu werden. Der Zerlegungsansatz ist der Schlüssel, mit dem komplexere kombinatorische Inhalte aus einem einführenden Stochastiklehrgang ausgelagert werden können.

Empfehlungen zur Kombinatorik

Anhand beider Lösungsansätze wird deutlich, dass der Zugang über Baumdiagramme (i) mathematisch weniger voraussetzungsreich ist, weil lediglich einfache kombinatorische Anordnungsverfahren benötigt und auf Binomialkoeffizienten verzichtet werden kann, (ii) strukturierter ist, weil die Kugeln der Reihe nach gezogen werden und (iii) lernökonomisch sinnvoller ist, weil Baumdiagramme in der Stochastik weiterführen. Damit ergeben sich folgende Empfehlungen für die Behandlung der Kombinatorik im Stochastikunterricht:

- In den ersten 3 Kapiteln eines Stochastiklehrgangs geht es um das Vorhersagen von Wahrscheinlichkeiten anhand von "Einfachen Bäumen", "Mammutbäumen" und "Bedingten Bäumen". Die Kombinatorik sollte in das Kapitel "Mammutbäume" eingebettet sein und nur dazu dienen, die Anzahl der interessierenden Pfade mit Hilfe von Stellvertreterpfaden zu bestimmen. Dazu wird lediglich die *Fakultät* benötigt. Sie kann anhand von Wahrscheinlichkeitsaufgaben, bei denen z.B. 5 unterschiedliche Knoteneinträge auf 5 Knotenplätzen anzuordnen sind, eingeführt werden. Gleichzeitig lässt sich der Binomialkoeffizient vorbereiten, indem man die Aufgabe so abändert, dass von den 5 Knoteneinträgen je 2 und 3 gleich sind.
  Auf die abkürzende Schreibweise $\binom{5}{2}$ und den Begriff *Binomialkoeffizient* sollte zu Beginn vollkommen verzichtet werden. Die Fakultätsschreibweise $\frac{5!}{2!\cdot 3!}$ zeigt viel deutlicher, *wie* die ursprüngliche Anordnungsanzahl durch die 2 und 3 gleichen Einträge reduziert wird. So wird klar, dass bei 9 Plätzen und 2, 3 und 4 je gleichen Knoteneinträgen folglich $\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}$ Anordnungsmöglichkeiten vorliegen müssen. *Binomial-* und *Polynomialkoeffizient* lassen sich so gemeinsam vorbereiten.
- Im 4. Kapitel, der "Binomialverteilung", können der Begriff *Binomialkoeffizient* und die abkürzende Schreibweise offiziell eingeführt und dessen algebraische Bedeutung anhand des Pascalschen Dreiecks deutlich gemacht werden.
- In Kapitel 5, bei der Hypergeometrischen Verteilung[2], geht es dann zum ersten Mal um *Auswahlmöglichkeiten*. Anhand des Funktionsterms
  $$\frac{\binom{R}{x}\cdot\binom{N-R}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$
  wird erkannt, dass der Binomialkoeffizient auch als

[1] Durch die Wahl der Astwahrscheinlichkeiten sind alle Permutationsmöglichkeiten der Einer-Knoten schon berücksichtigt worden. Man darf diese Knoteneinträge folglich nicht mit e_1, e_2, e_3, … bezeichnen.

[2] Die Hypergeometrische Verteilung spielt eine Schlüsselrolle beim Erlernen des sicheren Umgangs mit Verteilungen. Es ist ein großer Fehler, dass diese Verteilung aus den Lehrplänen einiger Bundesländer entfernt worden ist.

Anzahl von *Auswahlmöglichkeiten* (aus einer Urne mit ungleichen Kugeln) aufgefasst werden kann.

- Am Ende des gesamten Stochastiklehrgangs, etwa im Rahmen eines Abiturvorbereitungs-Trainings[1], kann schließlich ein kleiner, etwa 3-stündiger Exkurs "Kombinatorik" angeboten werden, in dem ein systematischer Überblick über das Abzählen bei Anordnungs- und Auswahlsituationen gegeben wird.

Kombinatorik-Exkurs

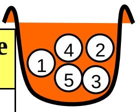
Auch ein dem eigentlichen Stochastiklehrgang angehängter Exkurs sollte mit den Anordnungsproblemen beginnen. Im Schulbereich genügt es, wenn 4 Anordnungssituationen abgezählt werden können:

Anordnungsmöglichkeiten auf 5 Plätzen Einträge	Beispiel	Anzahl
5 versch.	✚ | ☺ | Ω | Δ | ≈	**5!**
2 versch.	✚ | ☺ | | |	$\frac{5!}{3!}$
2 gl.	☺ | ☺ | | |	$\frac{5!}{3!2!}$
8 gl.	☺☺☺ | | ☺☺ | ☺☺ | ☺	$\frac{(8+4)!}{8!4!}$

Tabelle I: Anordnungsmöglichkeiten

Im 1. Fall spricht man von *Permutationen*, im 2. von *Variationen*, im 3. von *Kombinationen* und im 4. von *Mehrfachbesetzungen*. So gibt es *5!* Möglichkeiten, die 5 verschiedenen Einträge auf den 5 Plätzen anzuordnen. Bei den *Variationen* können die 3 leeren Einträge als gleiche Einträge interpretiert werden, was die ursprünglichen *5!* Anordnungsmöglichkeiten auf *5!/3!* reduziert. Bei den *Kombinationen* sind jeweils 2 und 3 der Einträge gleich, was die Zahl der unterschiedlichen Anordnungen weiter verringert zu $\frac{5!}{3!\cdot 2!}$. Sind *Mehrfachbesetzungen* erlaubt, können die 4 Trennwände der 5 Plätze als verschiebbar angesehen werden. Dadurch liegen 4 und 8 gleiche Objekte vor, die auf *4+8 = 12* Positionen angeordnet werden dürfen. Wie vorhin gesehen ergeben sich dafür $\frac{12!}{4!\cdot 8!}$ Möglichkeiten.

Um von den Anordnungs- zu den Auswahlmöglichkeiten zu gelangen, stellt man sich vor, dass die Platzzuweisung der Einträge aus Tabelle I dadurch erfolgt, dass für *jeden* Eintrag eine "Platznummer" aus einer Urne mit 5 nummerierten Kugeln gezogen wird. Jeder Anordnungsfall von Tabelle I wird so in einen entsprechenden Auswahlfall in Tabelle II überführt. Wurden dort k *ungleiche/gleiche* Einträge auf 5 Plätzen in *einfach/mehrfach Besetzung* angeordnet, so werden nun k Kugeln *mit/ohne Reihenfolge* aus einer 5er Urne *ohne/mit Zurücklegen* ausgewählt.



Auswahlmöglichkeiten aus einer 5er Urne gezogen	Beispiel	Anzahl
5 mit Reihenf.	③-①-⑤-②-④	**5!**
2 mit Reihenf.	②-①	$\frac{5!}{3!}$
2 ohne Reihenf.	② ①	$\frac{5!}{3!2!}$
8 ohne Reihenf.	① ① ① ⑤ ③ ④ ④ ③	$\frac{(8+4)!}{8!4!}$

Tabelle II: Auswahlmöglichkeiten

Dem letzten „Mehrfachbesetzungsfall“ aus Tabelle I entspricht nun der „Mit-Zurücklegen-Fall“ in Tabelle II. Wird aus der Urne „mit-Zurücklegen“ gezogen, so können einzelnen Kugeln mehrmals erscheinen. Im aufgeführten Beispiel wurde Kugel „1“ dreimal gezogen, analog zur Tabelle I, bei der Platz 1 dreimal besetzt worden ist.

Obwohl Anordnungs- und Auswahlfälle übereinstimmen und nur unterschiedliche Sichtweisen auf ein und denselben Zusammenhang bilden, können sich Schüler Tabelle I deutlich besser und nachhaltiger einprägen als Tabelle II. Folgende Gründe könnten dafür u.a. verantwortlich sein:

- k Objekte auf 5 Plätze auf einem Tisch neu anzuordnen, ist ein recht überschaubarer und leicht durchführbarer Vorgang. Dagegen ist der Auswahlvorgang deutlich komplexer. Bei ihm muss man eine Kugel aus einer 5er Urne ziehen, sich die Nummer auf einem Blatt Papier notieren, die Kugel zurück- oder weglegen, das ganze *k-1*-mal wiederholen und sich schließlich überlegen, ob die notierte Zahlenfolge mit oder ohne Reihenfolge betrachtet werden soll (was ja an sich wieder ein Anordnungsproblem darstellt).
- Im Anordnungsmodell ist klar, dass alle Plätze verschieden sind. Beim Auswahlmodell muss man sich dagegen explizit merken, dass die Kugeln *in* der Urne immer *unterschiedlich* nummeriert, also generell verschieden sein müssen.

Die Probleme, die beim Erfassen und Einprägen von Tabelle II auftreten, lassen sich nicht durch ändern der Darstellungsform beheben. Auch bei nebenstehender Abbildung wissen Schüler nach

		Reihenfolge ohne	mit
Zurücklegen	ohne	$\frac{5!}{3!\cdot 2!}$	$\frac{5!}{3!}$
	mit	$\frac{(8+4)!}{8!\cdot 4!}$	5^8

der 20 Altabiture der letzten 10 Jahre trainieren möchte, ist auf die Inhalte des dargestellten Kombinatorik-Exkurses angewiesen. Im Grundkursbereich wird der Exkurs nicht benötigt.

[1] Ein Abiturvorbereitungs-Training lässt sich sehr effizient mithilfe von Altabituren gestalten. Besonders gut eignen sich dazu die bayrischen, die unter www.abiturloesung.de in Videos vorgerechnet werden. Wer seine Leistungskursschüler intensiv anhand

kurzer Zeit nicht mehr, ob die "mit"-Fälle oben, unten, links oder rechts stehen und zu welcher Formel jeweils gehören. Hinzu kommt, dass nicht mehr erkennbar ist, wie sich die Formeln sukzessive aufbauen: vom Permutations- (5!) zum Variations- ($\frac{5!}{3!}$) und Kombinationsfall ($\frac{5!}{3!\cdot 2!}$), hin zum Mehrfachbesetzungsfall ($\frac{(8+4)!}{8!\cdot 4!}$). Einen *nachhaltigen* Überblick über Anordnungs- und Auswahlsituationen erlangen Schüler eher, wenn sie sich Tabelle I einprägen und daraus Tabelle II bei Bedarf ableiten.

Fazit

Wird nicht die *Abzählidee* (mit Laplace-Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik), sondern die viel breiter einsetzbare *Zerlegungsidee* (mit Standardlösungsverfahren und Baumdiagramm) in das Zentrum des Stochastiklehrgangs gestellt, so wird nur noch das Anordnungsmodell benötigt. Komplexere kombinatorische Betrachtungen können ausgelagert und die eigentlichen stochastischen Kerninhalte klarer herausgestellt werden.

Die gezielte Ausrichtung des Stochastiklehrgangs auf den *Zerlegungsansatz* führt nicht nur hier zu einer spürbaren didaktischen Entlastung. Auch bei den Themen "Bedingte Wahrscheinlichkeit", "Umgang mit Verteilungen" sowie "Schätzen und Testen von Wahrscheinlichkeiten" kann über diesen Ansatz ein beachtlicher Zugewinn an Klarheit und Sicherheit erreicht werden (Bartz 2008).

Unabhängig davon, *wie* der Stochastiklehrgang letztendlich konzipiert ist: das Abzählen im Anordnungs- und im Auswahlmodell sollte *immer* klar auseinander gehalten und deutlich voneinander getrennt eingeführt werden.

Literatur

Althoff H. (2012): Die Berechnung von Anzahlen und Wahrscheinlichkeiten im Spiel 77. In: *Stochastik in der Schule* 32(2).

Bartz S. (2008): Baumdiagramme als roter Faden der Schulstochastik. In: *Stochastik in der Schule* 28(1). www.stefanbartz.de/materialien.htm

Bartz S. (2009): Was tun bei Mammutbäumen? In: *Stochastik in der Schule* 29(1). www.stefanbartz.de/materialien.htm