





Winkel, Fläche, Volumen, Abstand

Ziel Winkel, Fläche, Volumen und Abstand mit Hilfe von Vektoren berechnen können.

Beispiel

	$\alpha_{g,g^*} = \cos^{-1} \frac{ \vec{v} \circ \vec{v}^* }{ \vec{v} \cdot \vec{v}^* }$ $\alpha_{E,g^*} = 90^\circ - \cos^{-1} \frac{ \vec{n} \circ \vec{v}^* }{ \vec{n} \cdot \vec{v}^* }$	A(32 12 8), B(12 12 8), D(32 6 12), E(6 6 12), H(8 14 16), L(32 0 8) g: = g _{AB} g*: = g _{DL} E: 2x ₂ +3x ₃ =48 E*: 2x ₁ +3x ₃ =48
	$A_{ABD} = \vec{AB} \times \vec{AD} $ Parallelogrammfläche	$A_{ADL} = \vec{AD} \times \vec{AL} = \left \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \right = \left \begin{pmatrix} 48 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right = 48 \text{ m}^2$
	$V_{ABDE} = \vec{AB} \times \vec{AD} \circ \vec{AE} $ Spatvolumen	$V_{ABDL} = \left \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right = \left \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 240 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right = 960 \text{ m}^3$
	$d_{g,P} = \frac{ \vec{AP} \times \vec{v} }{ \vec{v} }$ $d_{E,P} = \frac{ \vec{AP} \circ \vec{n} }{ \vec{n} }$ warum?	$d_{BE,H} = \frac{\left \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right }{\sqrt{88}} = \frac{\left \begin{pmatrix} 56 \\ -32 \\ 36 \end{pmatrix} \right }{\sqrt{88}} \approx 7,87 \text{ m}$ $d_{E^*,H} = \frac{\left \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right }{\sqrt{88}} = \frac{\left \begin{pmatrix} 56 \\ -32 \\ 36 \end{pmatrix} \right }{\sqrt{88}} \approx 4,44 \text{ m}$

Merke

Begründung der Winkelformel α_{E,g^*}	<ul style="list-style-type: none"> Eine Skizze zeigt, dass der berechnete Winkel zwischen \vec{n} und \vec{v}^* nicht dem gesuchten Winkel zwischen der Ebene E und der Geraden g* entspricht. Nur wenn der Winkel zwischen Vektoren gesucht ist. Kann > 90° sein.
Betragsstriche im Zähler weglassen	
Begründung der Abstandsformeln	$d_{g,P} = \frac{\text{Parallelogrammfläche}}{\text{Grundseite}} = \text{Höhe}$ $d_{E,P} = \frac{\text{Spatvolumen}}{\text{Grundfläche}} = \text{Höhe}$
d_{g,g^*} falls $g \parallel g^*$ d_{g,g^*} falls $g \perp g^*$	$d_{g,g^*} = d_{g,A^*}$ $d_{g,g^*} = d_{E,A^*}$ wobei $E: \vec{OX} = \vec{OA} + r\vec{v} + s\vec{v}^*$
V_{Pyramide} A_{Trapez} Achtung, die...	$V_{\text{Rechteckspyramide}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{Spat}}$ $V_{\text{Dreieckspyramide}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{Spat}}$ warum? $A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot A_{\text{Parallelogramm}} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{AB} + \vec{DC}) \times \vec{AD} $ warum? ...aufspannenden Vektoren müssen immer in einem gemeinsamen Punkt beginnen!
Tipp: Die Abstandsformel $d_{E,P}$ zeigt die Orientierung von \vec{n} an.	Ist der Zähler $\vec{AP} \circ \vec{n}$ positiv ($\alpha < 90^\circ$), zeigen \vec{AP} und \vec{n} in denselben Halbraum.

Übung

28 Bestimmen Sie in Aufgabe 3 jeweils a) Winkel und b) Fläche.

29 Folgende vier Punkte spannen einen Spat auf. Berechnen Sie Neigungswinkel, Grundfläche und Volumen.

- a) E(4|1|-1), F(4|8|-1), G(1|8|-1), H(3|2|3)
 b) C(3|8|-4), D(-1|5|-3), E(2|10|-2), F(1|10|2)

30 P, Q, R und S sind die Eckpunkte einer Dreieckspyramide.

Bestimmen Sie: $\alpha_{PQR, QS}$ | $d_{PQR, S}$ | $d_{QS, R}$ | V_{Pyramide}

- a) P(7|3|1), Q(11|1|4), R(8|5|3), S(5|1|7)
 b) P(1|-2|12), Q(11|3|5), R(3|5|8), S(19|4|4)

31 Welcher der Punkte A(3|2|-1), B(4|4|0), C(7|3|2) ist am weitesten von E entfernt? a) E: $3x_1 + 5x_2 - x_3 = 20$ b) E: $x_1 = 4$

32 Welcher der Punkte A(3|2|-1), B(4|4|0), C(7|3|-14) ist am weitesten von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ entfernt?

33 Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen g_{AB} und h_{CD} und bestimmen Sie deren Abstand.

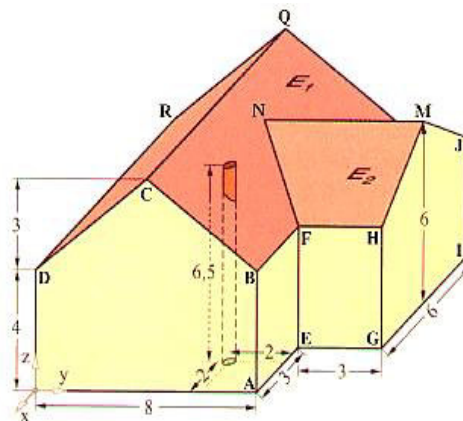
- a) A(2|5|5), B(3|6|8), C(0|0|0), D(-1|-1|-3)
 b) A(0|1|2), B(0|2|3), C(5|1|4), D(4|4|0)

34 Ein Trapez ist gegeben durch A(1|1|2), B(3|5|-2), C(2|3|2) und D(-4|-9|14). Bestimmen Sie

- a) die Vektoren der beiden parallelen Seiten.
 b) den Flächeninhalt A_{Trapez} .
 c) die Höhe. (elementar- und vektorgeometrisch)
 d) alle Innenwinkel.

e) den Lotfußpunkt F von g_{AB} bzgl. C.

f) C' beim Spiegeln von C an g_{AB} (nutzen Sie dazu Aufgabe e)).



35 Bei obigem symmetrischen(!) Haus soll die hintere(!) linke Ecke als Koordinatenursprung gewählt werden. Bestimmen Sie:

- a) die beiden Dachebenen E₁ und E₂ in Koordinatenform.
 b) die Wandebenen E_{ABC}, E_{ABE} und E_{EEG}.
 c) α_{E_1, E_2} , sowie den Winkel zwischen Schornstein und E₁.
 d) den Durchstoßpunkt des Schornsteins.
 e) den Abstand von Schornsteinspitze zur Fläche E₁.
 f) die Koordinaten von Punkt N.
 g) die Dachfläche des Nebengebäudes („2-E₂“).
 h) den Abstand zwischen g_{FN} und g_{CM} .
 i) das Volumen des umbauten Raums. (GK Näherung, LK exakt)