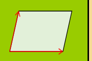
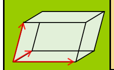
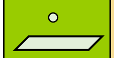
Winkel, Fläche, Volumen, Abstand

Ziel Winkel, Fläche, Volumen und Abstand mit Hilfe von Vektoren berechnen können.

Beispiel

∡	$\alpha_{g,g^*} = \cos^{-1}\dfrac{\lvert\vec{v}\circ\vec{v}^*\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert\cdot\lvert\vec{v}^*\rvert}$ $\alpha_{E,g^*} = 90° - \cos^{-1}\dfrac{\lvert\vec{n}\circ\vec{v}^*\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{v}^*\rvert}$	A(32|12|8), B(12|12|8), D(32|6|12), E(6|6|12), H(8|14|16), L(32|0|8) $g{:=}g_{AB}$ $g^*{:=}g_{DL}$ E: $2x_2+3x_3=48$ E*: $2x_1+3x_3=48$ $\alpha_{g,g^*} = 90°$ $\alpha_{E,E^*} \approx 46{,}19°$ $\alpha_{g^*,E^*} \approx 27{,}49°$
	$A_{ABD} = \lvert\vec{AB} \times \vec{AD}\rvert$ Parallelogrammfläche	$A_{ADL} = \lvert\vec{AD}\times\vec{AL}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}0\\-6\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-12\\0\end{pmatrix}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}48\\0\\0\end{pmatrix}\right\rvert = 48\text{ m}^2$
	$V_{ABDE} = \lvert\vec{AB}\times\vec{AD}\circ\vec{AE}\rvert$ Spatvolumen	$V_{ABLD} = \left\lvert\begin{pmatrix}-20\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-12\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\-6\\4\end{pmatrix}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}0\\0\\240\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\-6\\4\end{pmatrix}\right\rvert = 960\text{ m}^3$
	$d_{g,P} = \dfrac{\lvert\vec{AP}\times\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert}$ $d_{E,P} = \dfrac{\lvert\vec{AP}\circ\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$ warum?	$d_{BE,H} = \dfrac{\left\lvert\begin{pmatrix}-4\\2\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-6\\-6\\4\end{pmatrix}\right\rvert}{\sqrt{88}} = \dfrac{\left\lvert\begin{pmatrix}56\\-32\\36\end{pmatrix}\right\rvert}{\sqrt{88}} \approx 7{,}87\text{ m}$ $d_{E^*,H} = \dfrac{\left\lvert\begin{pmatrix}-4\\2\\8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-6\\-6\\4\end{pmatrix}\right\rvert}{\sqrt{88}} = \dfrac{\left\lvert\begin{pmatrix}56\\-32\\36\end{pmatrix}\right\rvert}{\sqrt{88}} \approx 4{,}44\text{ m}$

Merke

Begründung der Winkelformel α_{E,g^*} Betragsstriche im Zähler weglassen	• Eine Skizze zeigt, dass der berechnete Winkel zwischen $\vec{n}$ und $\vec{v}^*$ nicht dem gesuchten Winkel zwischen der Ebene E und der Geraden g* entspricht. • Nur wenn der Winkel zwischen Vektoren gesucht ist. Kann > 90° sein.
Begründung der Abstandsformeln	$d_{g,P} = \dfrac{Parallelogrammfläche}{Grundseite} = Höhe$ $d_{E,P} = \dfrac{Spatvolumen}{Grundfläche} = Höhe$
d_{g,g^*} falls $g \parallel g^*$ bzw. falls $g \setminus g^*$	$d_{g,g^*} = \dfrac{\lvert\vec{AA^*}\times\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert}$ bzw. $d_{g,g^*} = \dfrac{\lvert\vec{AA^*}\circ\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$ $\vec{n} = \vec{v}\times\vec{v}^*$
$V_{Pyramide}$ A_{Trapez} Achtung, die...	$V_{Rechteckspyramide} = \frac{1}{3}\cdot V_{Spat}$ $V_{Dreieckspyramide} = \frac{1}{6}\cdot V_{Spat}$ warum? $A_{Trapez} = ½ \cdot A_{Parallelogramm} = ½ \cdot \lvert(\vec{AB}+\vec{DC})\times\vec{AD})\rvert$ warum? ...aufspannenden Vektoren müssen immer in einem gemeinsamen Punkt beginnen!
Tipp: Die Abstandsformel $d_{E,P}$ zeigt die Orientierung von $\vec{n}$ an.	Ist der Zähler $\vec{AP}\circ\vec{n}$ positiv (α<90°), zeigen $\vec{AP}$ und $\vec{n}$ in denselben Halbraum.

Übung

28 Bestimmen Sie in Aufgabe 3 jeweils a) Winkel und b) Fläche.

29 Folgende vier Punkte spannen einen Spat auf. Berechnen Sie Neigungswinkel, Grundfläche und Volumen.
a) E(4|1|-1), F(4|8|-1), G(1|8|-1), H(3|2|3)
b) C(3|8|-4), D(-1|5|-3), E(2|10|-2), F(1|10|2)

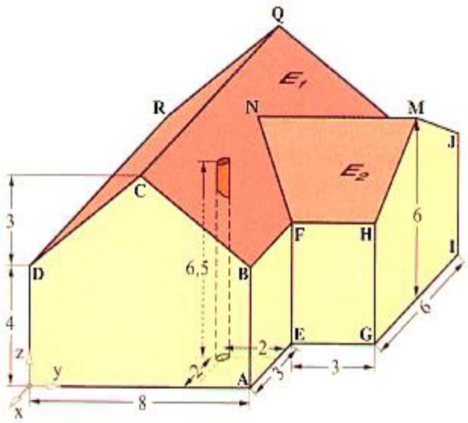
30 P, Q, R und S sind die Eckpunkte einer Dreieckspyramide. Bestimmen Sie: $\alpha_{PQR,\,QS}$ | $d_{PQR,\,S}$ | $d_{QS,\,R}$ | $V_{Pyramide}$
a) P(7|3|1), Q(11|1|4), R(8|5|3), S(5|1|7)
b) P(1|-2|12), Q(11|3|5), R(3|5|8), S(19|4|4)

31 Welcher der Punkte A(3|2|-1), B(4|4|0), C(7|3|2) ist am weitesten von E entfernt? a) E: $3x_1 + 5x_2 - x_3 = 20$ b) E: $x_1 = 4$

32 Welcher der Punkte A(3|2|-1), B(4|4|0), C(7|3|-14) ist am weitesten von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$ entfernt?

33 Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen g_{AB} und h_{CD} und bestimmen Sie deren Abstand.
a) A(2|5|5), B(3|6|8), C(0|0|0), D(-1|-1|-3)
b) A(0|1|2), B(0|2|3), C(5|1|4), D(4|4|0)

34 Ein Trapez ist gegeben durch A(1|1|2), B(3|5|-2), C(2|3|2) und D(-4|-9|14). Bestimmen Sie
a) die Vektoren der beiden parallelen Seiten.
b) den Flächeninhalt A_{Trapez}.
c) die Höhe. (elementar- und vektorgeometrisch)
d) alle Innenwinkel.
e) den Lotfußpunkt F von g_{AB} bzgl. C.
f) C′ beim Spiegeln von C an g_{AB} (nutzen Sie dazu Aufgabe e)).



35 Bei obigem symmetrischen(!) Haus soll die hintere(!) linke Ecke als Koordinatenursprung gewählt werden. Bestimmen Sie:
a) die beiden Dachebenen E_1 und E_2 in Koordinatenform.
b) die Wandebenen E_{ABC}, E_{ABE} und E_{EFG}.
c) $\alpha_{E1,E2}$, sowie den Winkel zwischen Schornstein und E_1.
d) den Durchstoßpunkt des Schornsteins.
e) den Abstand von Schornsteinspitze zur Fläche E_1.
f) die Koordinaten von Punkt N.
g) die Dachfläche des Nebengebäudes („2·E_2").
h) den Abstand zwischen g_{FN} und g_{CM}.
i) das Volumen des umbauten Raums. {GK Näherung, LK exakt}