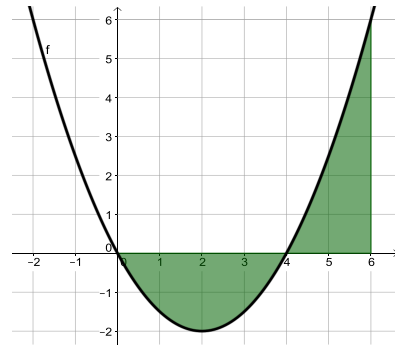


Analysis II

Ziel Vorhersagen von Vorgängen mit zusammengesetzten Funktionen.

Kernidee

integrieren „aufleiten“ differenzieren ableiten	$F: Y = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + c$	Y gibt die orient. Fläche von 0 bis x an.
	$f: y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$	y gibt die Höhe an der Stelle x an.
	$f': y' = x - 2$	y' gibt die Steigung an der Stelle x an.
	$f'': y'' = 1$	y'' gibt die Krümmung* an der Stelle x an.



Beispiel Welche Informationen können wir über den Graphen der Funktion $f: y = 0,5x^2 - 2x$ rechnerisch herausfinden?

y Zahlen	y' Zahlen	y'' Zahlen	Y Zahlen
$f(0) = 0$	$f'(0) = -2$	$f''(0) = 1$	$F(0) = 0 + c$
$f(1) = -1,5$	$f'(1) = -1$	$f''(1) = 1$	$F(1) = -0,8\bar{3} + c$
$f(2) = -2$	$f'(2) = 0$	$f''(2) = 1$	$F(2) = -2,6 + c$
$f(4) = 0$	$f'(4) = 2$	$f''(4) = 1$	$F(4) = -5,3 + c$
$f(6) = 6$	$f'(6) = 4$	$f''(6) = 1$	$F(6) = 0 + c$

Daran lässt sich ablesen, wo f positive bzw. negative **Höhe** besitzt.
 Daran lässt sich ablesen, wo f' positiv bzw. negativ **steigt**.
 Daran lässt sich ablesen, wo f'' pos. bzw. negat. **gekrümmt** ist.
 Daran lässt sich ablesen, wo F pos. bzw. negat. **Flächen** besitzt.

Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der obigen Zahlen: a) die Koordinaten der Hoch-/Tief-/Sattelpunkte von f , b) die Koordinaten der Wende-/Flachpunkte von f , c) den *exakten* orientierten Flächeninhalt von 1 bis 4.

Merke

Entwicklung der Analysis II Was liefern: $y y' y'' Y$?	(~1600 Galilei); ~1700 Newton/Leibniz; ~1750 Euler; ~1850 Cauchy/Weierstraß Höhe, Steigung, Krümmung und orient. Fläche des Graphen von f .
Wie findet man...	a) die Hoch-/Tief-/Sattelpunkte? $f'(x) = 0? \rightarrow (...)\dots \rightarrow$ VZW bei f' prüfen b) die Wende-/Flachpunkte? $f''(x) = 0? \rightarrow (...)\dots \rightarrow$ VZW bei f'' prüfen c) den absoluten Flächeninhalt zw. 1 und 4. $A = F(4) - F(1) $ c fällt weg.
integrieren („aufleiten“) differenzieren (ableiten) 2 Schreibweisen:	\rightarrow mit dem neuen Exponenten multiplizieren und c addieren . \rightarrow mit dem alten Exponenten multiplizieren. $F(x) = x^3 + c \leftrightarrow \int 3x^2 dx = x^3 + c$ $f'(x) = 2x \leftrightarrow \frac{d}{dx} x^2 = 2x$
+– Steigung Steigung –2 ...	Zuerst eine positive bergauf- und dann eine negative bergab-Steigung. Steigung –2: bei einer Geraden „geht“ es 2 Einheiten hinab (pro Einheit nach rechts).
+– Krümmung	Zuerst eine positive Smiley- und dann eine negative Angry-Krümmung.
absoluter \leftrightarrow orient. Flächeninhalt	Beim absoluten Flächeninhalt werden die Flächenteile über und unter der x-Achse beide positiv gewertet und summiert. Beim orientierten zählen die Flächen unter der x-Achse negativ.
Tiefstelle 2 \pm Wendestelle 8	bedeutet: $f'(2) = 0$ und f' hat dort einen –/+ Übergang (VZW) bedeutet: $f''(8) = 0$ und f'' hat dort einen +/– Übergang (VZW)



Übung 1 Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabelle jeweils f', f'' und F .

- a) Von allen 12 Grundfunktionen. b) $f(x) = -x^2 + 5x + 6$ c) $f(x) = -2\sqrt{x} + 4x - 1$
 d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ e) $f(x) = 3x^3 - x^2 + \frac{5}{x^2}$ f) $f(x) = (x^3 - 4)^2$
 g) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ h) $f(x) = 3 \cdot \sin x$ i) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$
 j) $f(x) = 3(\sqrt[3]{x^5})^{-1}$ k) $f(x) = \cos x + 2 \ln x$ l) $f(x) = 4 \cdot e^x + \frac{1}{x}$
 m) Zeichnen Sie einen negativ steigenden Graphen mit positiver und negativer Krümmung.
 n) Tragen Sie entlang eines frei gewählten Graphen **Höhen-/ Steigungs-/** und **Krümmungs-** vorzeichen in je eigener Farbe ein.
 o) Zeichnen Sie je einen Graphen, dessen **Höhe** im „Unendlichen“ $+\infty, -\infty, 0^+, 0^-$ bzw. 3^+ beträgt.

	F	f	f'
Grundfktn.	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$	x^r	$r \cdot x^{r-1}$
	$e^x + c$	e^x	e^x
	$x \cdot \ln x - x + c$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
Zusammenges. Fkt.	$-\cos x + c$	$\sin x$	$\cos x$
	r-G	r-g	r-g'
	G + H	g + h	g' + h'
	$\otimes \otimes \otimes$ G(h)	g(h)	g'(h) · h'
	Gh – fGh'	g · h	g' · h + gh'
	$\int f(z) dz$	$\frac{g}{h}$	$\frac{g'h - gh'}{h^2}$

* Die Krümmung wird eigentlich mit $\frac{f''}{(1+f'^2)^{1.5}}$ berechnet. f'' gibt also genau genommen nur das Krümmungsvorzeichen an.