Analysis II

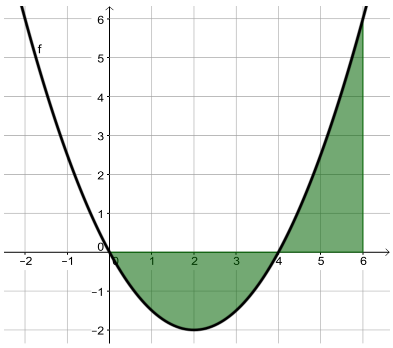
Ziel Vorhersagen von Vorgängen mit zusammengesetzten Funktionen.

Kernidee

integrieren „aufleiten"

differenzieren ableiten

$F\colon\ Y\ = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + c$	Y gibt die **orient. Fläche** von 0 bis x an.
$f\colon\ y\ = \frac{1}{2}x^2 - 2x$	y gibt die **Höhe** an der Stelle x an.
$f'\colon\ y'\ = x - 2$	y' gibt die **Steigung** an der Stelle x an.
$f''\colon\ y''\ = 1$	y'' gibt die **Krümmung** an der Stelle x an.



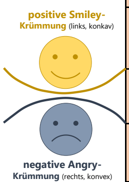
Beispiel Welche Informationen können wir über den Graphen der Funktion $f\colon y = 0{,}5\,x^2 - 2x$ rechnerisch herausfinden?

y Zahlen	**y'** Zahlen	**y''** Zahlen	**Y** Zahlen
f(0) = **0**	f´(0) = **–2**	f´´(0) = **1**	F(0) = **0 +c**
f(1) = **–1,5**	f´(1) = **–1**	f´´(1) = **1**	F(1) = **– 0,8$\overline{3}$ +c**
f(2) = **–2**	f´(2) = **0**	f´´(2) = **1**	F(2) = **– 2,$\overline{6}$ +c**
f(4) = **0**	f´(4) = **2**	f´´(4) = **1**	F(4) = **– 5,$\overline{3}$ +c**
f(6) = **6**	f´(6) = **4**	f´´(6) = **1**	F(6) = **0 +c**
Daran lässt sich ablesen, wo f positive bzw. negative **Höhe** besitzt.	Daran lässt sich ablesen, wo f positiv bzw. negativ **steigt**.	Daran lässt sich ablesen, wo f pos. bzw. negat. **gekrümmt** ist.	Daran lässt sich ablesen, wo f pos. bzw. negat. **Flächen** besitzt.

Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der obigen Zahlen: a) die Koordinaten der Hoch-/Tief-/Sattelpunkte von f,
b) die Koordinaten der Wende-/Flachpunkte von f, c) den *exakten* orientierten Flächeninhalt von 1 bis 4.

Merke

Entwicklung der Analysis II Was liefern: y| y'| y''| Y?	(~1600 Galilei); ~1700 Leibniz/Newton; ~1750 Euler; ~1850 Cauchy/Weierstraß Höhe, Steigung, Krümmung und orient. Fläche des Graphen von f.
Wie findet man…	a) die Hoch-/Tief-/Sattelpunkte? $f'(x) = 0$? → (…|…) → VZW bei f' prüfen b) die Wende-/Flachpunkte? $f''(x) = 0$? → (…|…) → VZW bei f'' prüfen c) den absoluten Flächeninhalt zw. 1 und 4. A = |F(4) - F(1)| c fällt weg.
integrieren („aufleiten") differenzieren (ableiten) *2 Schreibweisen:*	→ mit dem Kehrwert des neuen Exponenten multiplizieren und c addieren. → mit dem alten Exponenten multiplizieren. $F(x) = x^3 + c \;\leftrightarrow\; \int 3x^2\,dx = x^3 + c$ $\quad f'(x) = 2x \;\leftrightarrow\; \frac{d}{dx}x^2 = 2x$
+– Steigung Steigung –2 …	Zuerst eine positive bergauf- und dann eine negative bergab-Steigung. Steigung –2: bei einer Geraden „geht" es 2 Einheiten hinab (pro Einheit nach rechts).
+– Krümmung	Zuerst eine positive Smiley- und dann eine negative Angry-Krümmung.
absoluter ↔ orient. Flächeninhalt	Beim absoluten Flächeninhalt werden die Flächenteile über und unter der x-Achse beide positiv gewertet und summiert. Beim orientierten zählen die Flächen unter der x-Achse negativ.
Tiefstelle 2 ±Wendestelle 8	bedeutet: f' (2) = 0 und f' hat dort einen –/+ Übergang (VZW) bedeutet: f''(8) = 0 und f'' hat dort einen +/– Übergang (VZW)



Übung **1** Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabelle jeweils f', f'' und F.

a) Von allen 12 Grundfunktionen. b) $f(x) = -x^2 + 5x + 6$ c) $f(x) = -2\sqrt{x} + 4x - 1$

d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ e) $f(x) = 3x^3 - x^2 + \frac{5}{x^2}$ f) $f(x) = (x^3 - 4)^2$

g) $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$ h) $f(x) = 3 \cdot \sin x$ i) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$

j) $f(x) = 3\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^{-1}$ k) $f(x) = \cos x + 2\ln x$ l) $f(x) = 4 \cdot e^x + \frac{1}{x}$

m) Zeichnen Sie einen negativ steigenden Graphen mit positiver und negativer Krümmung.

n) Tragen Sie entlang eines frei gewählten Graphen **Höhen**-/ **Steigungs**-/ und **Krümmungs**-vorzeichen in je eigener Farbe ein.

o) Zeichnen Sie je einen Graphen, dessen **Höhe** im „Unendlichen" $+\infty, -\infty, 0^+, 0^-$ bzw. 3^+ beträgt.

	F	f	f'
Grundfktn.	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$ +c	x^r	$r \cdot x^{r-1}$
	e^x +c	e^x	e^x
	x·ln x – x +c	ln x	$\frac{1}{x}$
	– cos x +c	sin x	cos x
Zusammenges. Fkt.	r·G G + H	r·g g + h	r·g' g' + h'
	☹☠☹ G(h)	g(h) g(h)·h'	g'(h)·h'
	Gh–∫Gh'	g·h	g'h + gh'
	∫f(z) *dz*	$\frac{g}{h}$	$\frac{g'h - gh'}{h^2}$