Analysis II

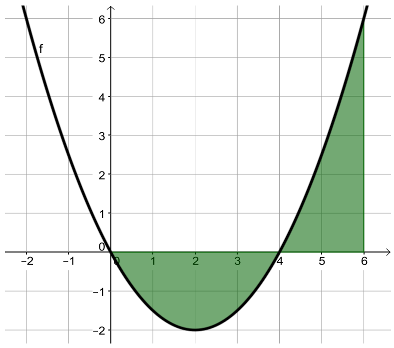
Ziel Vorhersagen von Vorgängen mit zusammengesetzten Funktionen.

Kernidee

integrieren „aufleiten“

differenzieren ableiten

$F\colon\ Y\ = \left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + c\right]$	Y gibt die **orient. Fläche** von 0 bis x an.
$\boldsymbol{f\colon\ y\ = \frac{1}{2}x^2 - 2x}$	y gibt die **Höhe** an der Stelle x an.
$f'\colon\ y'\ = x - 2$	y′ gibt die **Steigung** an der Stelle x an.
$f''\colon\ y''\ = 1$	y′′ gibt die **Krümmung*** an der Stelle x an.

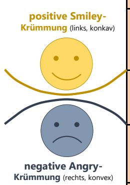


Beispiel Welche Informationen können wir über den Graphen der Funktion $f\colon y = 0{,}5\,x^2 - 2x$ rechnerisch herausfinden?

y Zahlen	**y′** Zahlen	**y′′** Zahlen	**Y** Zahlen
f(0) = **0**	f′(0) = **−2**	f′′(0) = **1**	F(0) = **0 +c**
f(1) = **−1,5**	f′(1) = **−1**	f′′(1) = **1**	F(1) = **− 0,8$\overline{3}$ +c**
f(2) = **−2**	f′(2) = **0**	f′′(2) = **1**	F(2) = **− 2,$\overline{6}$ +c**
f(4) = **0**	f′(4) = **2**	f′′(4) = **1**	F(4) = **− 5,$\overline{3}$ +c**
f(6) = **6**	f′(6) = **4**	f′′(6) = **1**	F(6) = **0 +c**
Zeigen, wo f pos. bzw. neg. **Höhe** besitzt.	Zeigen, wo f pos. bzw. neg. **Steigung** besitzt.	Zeigen, wo f pos. bzw. neg. **Krümmung** besitzt.	Zeigen, wo f pos. bzw. neg. **Flächen** besitzt.

Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der obigen Zahlen: a) die Koordinaten der Hoch-/Tief-/Sattelpunkte von f,
b) die Koordinaten der Wende-/Flachpunkte von f, c) den *exakten* orientierten Flächeninhalt von 1 bis 4 (ohne c).

Merke



Entwicklung der Analysis II Was liefern: y| y′| y′′| Y?	(~1600 Galilei); ~1700 Newton/Leibniz; ~1750 Euler; ~1850 Cauchy/Weierstraß Höhe, Steigung, Krümmung und orient. Fläche des Graphen von f.
Wie findet man…	a) die Hoch-/Tief-/Sattelpunkte? $f'(x) = 0\,?$ → (…|…) → Welchen VZW hat f′ dort? b) die Wende-/Flachpunkte? $f''(x) = 0\,?$ → (…|…) → Welchen VZW hat f′′ dort? c) den absoluten Flächeninhalt von 1 bis 4. A = |F(4) - F(1)| c fällt weg.
integrieren („aufleiten“) → differenzieren (ableiten) → *Schreibweise:*	den neuen Exponenten als Kehrwert nach vorne ziehen und c addieren. den alten Exponenten nach vorne ziehen. $\int 3x^2\,dx = x^3 + c$ bzw. $\frac{d}{dx}\,x^2 = 2x$
+– Steigung Steigung –2 bei einer Gerade:	Zuerst eine positive bergauf- und dann eine negative bergab-Steigung. pro Einheit nach rechts „geht“ es 2 Einheiten hinab.
+– Krümmung	Zuerst eine positive Smiley- und dann eine negative Angry-Krümmung.
absoluter ↔ orient. Flächeninhalt	Beim absoluten Flächeninhalt werden die Flächenteile über und unter der x-Achse beide positiv gewertet und summiert. Beim orientierten zählen die Flächen unter der x-Achse negativ.
Tiefstelle 2 ±Wendestelle 8	bedeutet: f′ (2) = 0 und f′ hat dort einen –/+ VZW bedeutet: f′′(8) = 0 und f′′ hat dort einen +/– VZW

Übung **1** Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabelle jeweils f′, f′′ und F.

a) Von allen 12 Grundfunktionen. b) $f(x) = -x^2 + 5x + 6$ c) $f(x) = -2\sqrt{x} + 4x - 1$

d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ e) $f(x) = 3x^3 - x^2 + \frac{5}{x^2}$ f) $f(x) = (x^3 - 4)^2$

g) $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$ h) $f(x) = 3 \cdot \sin x$ i) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$

j) $f(x) = 3\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^{-1}$ k) $f(x) = \cos x + 2\ln x$ l) $f(x) = 4 \cdot e^x + \frac{1}{x}$

m) Zeichnen Sie einen Graphen mit negativer Steigung, der posit. *und* negat. gekrümmt ist.

n) Tragen Sie entlang eines frei gewählten Graphen **Höhen**-/ **Steigungs**-/ und **Krümmungs**-vorzeichen in je eigener Farbe ein.

o) Zeichnen Sie je einen Graphen, dessen **Höhe** im „Unendlichen“ +∞, – ∞, 0⁺, 0⁻ bzw. 3⁺ beträgt.

	F	**f**	**f′**
Grundfktn.	$\frac{1}{r+1}\,x^{r+1}$ +c	x^r	$r \cdot x^{r-1}$
	e^x +c	e^x	e^x
	x·ln x – x +c	ln x	$\frac{1}{x}$
	– cos x +c	sin x	cos x – sin x
Zusammenges. Fktn.	r·G G + H	r·g g + h	r·g′ g′ + h′
	☠ ☠ ☠ G(h)	g(h) g(h)·h′	g′(h)·h′
	Gh–∫Gh′	g·h	g′h + gh′
	∫f(z) *dz*	$\frac{g}{h}$	$\frac{g'h - gh'}{h^2}$

* Die Krümmung wird eigentlich mit $\frac{f''}{(1+f'^2)^{1.5}}$ berechnet. Der pos. Nenner bewirkt, dass bereits f ′′ das richtige Krümmungsvorzeichen liefert.