Fläche gesucht

Ziel Flächeninhalt von allen krummlinig-begrenzten Figuren bestimmen können.

Beispiel Die 4 Aufgabentypen des Kapitels

F ges.	Bestimmen Sie die **Stammfunktion** von f: y = $0{,}5x^2 - 2x$.	$F(x) = \left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + c\right]$
∫ ges.	Bestimmen Sie den **orient. Flächeninhalt** zwischen f und x Achse von 1 bis 6.	$\int_1^6 \frac{1}{2}x^2 - 2x\,dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x + c\right]_1^6 = 0{,}8\overline{3}\ LE^2$
A ges.	Bestimmen Sie den **absolut. Flächeninhalt** a) von 1 bis 6 b) zw. f und g (g: y = $2 - 2x - 1{,}5x^2$) c) von 1 bis ∞ (f: y = x^{-2})	a) $A = \left\|\int_1^4 f\,dx\right\| + \left\|\int_4^6 f\,dx\right\| = \|\,[F(x)]_1^4\,\|+\|\,[F(x)]_4^6\,\| = 9{,}8\overline{3}\ cm^2$ b) $A = \left\|\int_{-1}^1 2x^2 - 2\,dx\right\| = \left\|\left[\frac{2}{3}x^3 - 2x + c\right]_{-1}^1\right\| = 2,\overline{3}\ LE^2$ c) $A = \left\|\int_1^\infty x^{-2}\,dx\right\| = \left\|\left[-x^{-1} + c\right]_1^\infty\right\| = \left\|-\frac{1}{\infty} - (-1^{-1})\right\| = 1\ LE^2$
V ges.	Bestimmen Sie das **Volumen** von 0 bis 5, wenn f: y=x+2 um die x-Achse rotiert.	$V = \pi\int_0^5 (x+2)^2\,dx = \pi\left[\frac{1}{3}(x+2)^3 + c\right]_0^5 \approx 350{,}81\ LE^3$

Merke

Wie ermittelt man?		
1) die Stammfunktion F Was liefert F?	Mit Kehrwert des *neuen* Exponenten multiplizieren; Probe durchführen: F' muss wieder f ergeben. Den **unklaren** orientierten Flächeninhalt (Konstante c und Vorzeichen noch unklar).*	
2) den *orient.* Flächeninhalt ∫	$\int_{-3}^5 f\,dx = F(5) - F(-3)$	c fällt weg! Achtung, zuerst die obere Grenze einsetzen!*
3a) den *absoluten* Flächeninhalt A	(i) Nullstellen $n_{1,2,\ldots}$ bestimmen mit f=0	(ii) A=$\left\|\int_a^{n1} f\,dx\right\| + \left\|\int_{n1}^b f\,dx\right\|$
b) die *eingeschl. absol.* Fläche A Schnittwinkel?	(i) Schnittstellen s_1, s_2 bestimmen mit f=g	(ii) A=$\left\|\int_{s1}^{s2}(f-g)\,dx\right\|$ Schnittwinkel: $\alpha = \|\tan^{-1} f'(s) - \tan^{-1} g'(s)\|$
c) die *uneigentl. absol.* Fläche A	A = $\left\|\int_1^\infty f\,dx\right\|$	Ergibt sich ein endlicher Flächeninhalt?
4) das Volumen V	V = $\pi\int_1^6 f^2\ dx$ um die x-Achse	V = $\pi\int_?^? (f^{-1})^2\ dx$ um die y-Achse

Schreib-/Sprechweise

	F(x)	f(x)	f'(x)
	← integrieren „aufleiten"		differenzieren ableiten →
Beispiel	$\frac{1}{3}x^3 + c$	x^2	$2x$
Name	Stammfunktion Flächen-/Integralfunktion*	urspr. Funktion	Ableitungsfunktion Steigungs-/Differentialfunktion
Schreibweise des Übergangs	$\int x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + c\right]$		$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$

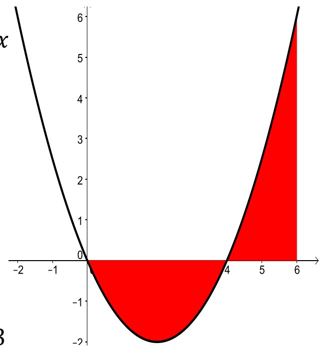
Übung

7 a) $\int 0{,}5x^3 - 2x^2 + x - 1\,dx$ b) $\int -x^2 + 5x + 6\,dx$ c) $\int_2^6 (x^2 - 4x)\,dx$

d) $\int_1^3 (2x^2 + 2x - 4)\,dx$ e) $\int_{-1}^3 (x^2 + 8x - 4)\,dx$ f) $\int_0^2 (x^3 - 2x)\,dx$

g) $\int 3x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{5}{x^2}\,dx$ h) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ i) $\int_1^\infty \left(\sqrt{x^3}\right)^{-1}\,dx$

j) $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$ k) $\int_{-\infty}^0 -4x^{-3}\,dx$ l) $\int_0^1 x + \frac{1}{4\sqrt{x}}\,dx$



8 Bestimmen Sie die jeweiligen *absoluten* Flächeninhalte bei den vorherigen Aufgaben c) – f).

g) Was ist der Unterschied zwischen F, ∫ f und A?

9 Bestimmen Sie den von f und g eingeschlossenen Flächeninhalt.

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = 2 - x^2$ b) $f(x) = x^3$; $g(x) = x^2$

c) $f(x) = x^3$; $g(x) = x$ d) $f(x) = x^3 - 3x$; $g(x) = 2x^2$

e) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$; $g(x) = -x^2 + 7$ f) $f(x) = 0{,}5(x-2)^2 + 3{,}5$; $g(x) = x + 3$

10 Bestimmen Sie die beiden Volumina, die beim Rotieren von f um die x-Achse bzw. die y-Achse entstehen.

a) $f(x) = 0{,}5x^2 + 1$ [0; 3] b) $f(x) = \frac{-6}{x}$ [-6; -1] c) $f(x) = 1 + \ln(x)$ [1; e]

* Achtung: Nur „F(b) – F(a)" liefert die orientierte Fläche exakt. F(b) alleine liefert die orientierte Fläche von 0 bis b um eine unbekannt Konstante c und ggf. ein Vorzeichen verfälscht. So beträgt F(–1) = **$-1{,}1\overline{6}$ +c** bei der oben rechts abgebildeten Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$. Und das, obwohl die entsprechende Fläche ***oberhalb*** der x-Achse liegt. Erst das Integral liefert den richtigen ***positiven und von c befreiten*** Wert: $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = +1{,}1\overline{6}$. Das richtige Vorzeichen entsteht übrigens nur, wenn die untere Integralgrenze kleiner als die obere ist, es muss also immer von links nach rechts integriert werden.