Fläche gesucht

Ziel Den Flächeninhalt aller krummlinig-begrenzten Figuren bestimmen können.

Beispiel Die 4 Aufgabentypen des Kapitels

F ges.	**Stammfunktion** von f: $y = 0{,}5x^2 - 2x$	$F(x) = \left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + c\right]$
∫ ges.	**orient. Fläche** von 1 bis 6.	$\int_1^6 \frac{1}{2}x^2 - 2x\,dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x + c\right]_1^6 = 0{,}8\overline{3}\ LE^2$
A ges.	**absolut. Fläche** a) von 1 bis 6 b) zw. f und g (g: $y = 2 - 2x - 1{,}5x^2$) c) von 1 bis ∞ (f: $y = x^{-2}$)	a) $A = \left\|\int_1^4 f\,dx\right\| + \left\|\int_4^6 f\,dx\right\| = \|\,[F(x)]_1^4\,\| + \|\,[F(x)]_4^6\,\| = 9{,}8\overline{3}\ cm^2$ b) $A = \left\|\int_{-1}^1 2x^2 - 2\,dx\right\| = \left\|\left[\frac{2}{3}x^3 - 2x + c\right]_{-1}^1\right\| = 2{,}\overline{6}\ LE^2$ c) $A = \left\|\int_1^\infty x^{-2}\,dx\right\| = \left\|\left[-x^{-1} + c\right]_1^\infty\right\| = \left\|-\frac{1}{\infty} - (-1^{-1})\right\| = 1\ LE^2$
V ges.	**Volumen** von 0 bis 4 (wenn f: y=x+2 um die x-Achse rotiert)	$V = \pi\int_0^4 (x+2)^2\,dx = \pi\left[\frac{1}{3}(x+2)^3 + c\right]_0^4 = \pi\left(72 - \frac{8}{3}\right) \approx 217{,}82\ LE^3$

Merke

Wie ermittelt man?		
Stammfunktion F Was liefert F?	*Neuer* Exponent als Kehrwert nach vorne und c addieren. Den **unbest.** orientierten Flächeninhalt	ggf. Probe: F′ muss wieder f ergeben (c, untere Grenze und Vorzeichen noch unbestimmt).*
orient. Fläche ∫	$\int_{-3}^5 f\,dx = [F]_3^5$	c fällt weg! Achtung, zuerst die obere Grenze einsetzen!*
absolute Fläche A	$A = \left\|\int_a^{n1} f\,dx\right\| + \left\|\int_{n1}^b f\,dx\right\|$	n_1, n_2 bestimmen mit f=0
eingeschl. Fläche A Schnittwinkel?	$A = \left\|\int_{s1}^{s2} (f-g)\,dx\right\|$	s_1, s_2 bestimmen mit f=g $\alpha = \|\tan^{-1} f'(s) - \tan^{-1} g'(s)\|$
uneigentl. Fläche A	$A = \left\|\int_1^\infty f\,dx\right\|$	Ergibt sich ein endlicher Flächeninhalt?
Volumen V	$V_x = \pi\int_1^6 f^2\,dx$ um die x-Achse	$V_y = \pi\int_1^6 (f^{-1})^2\,dx$ um die y-Achse

Schreib-/Sprechweise

	F(x) ← integrieren „aufleiten“	**f(x)** → differenzieren ableiten	**f′(x)**	
Beispiel	$\left[\frac{1}{3}x^3 + c\right]$	x^2	$2x$	
Name	Stammfunktion Flächen-/Integralfunktion*	urspr. Funktion	Ableitungsfunktion Steigungs-/Differentialfunktion	Integralfkt unbest. ↔ best.
Schreibweise des Übergangs	$\int x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + c\right]$		$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$	Integral

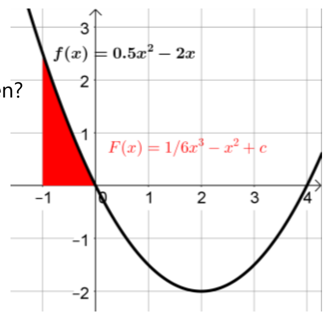
Übung

7 a) $\int 0{,}5x^3 - 2x^2 + x - 1\,dx$ b) $\int_{-2}^{x} -x^2 + 6\,dx$ c) $\int_2^6 (x^2 - 4x)\,dx$

d) $\int_1^3 (2x^2 + 2x - 4)\,dx$ e) $\int_{-1}^3 (x^2 + 8x - 4)\,dx$ f) $\int_0^2 (x^3 - 2x)\,dx$

g) $\int_1^x 3x^3 - 2\cdot\sin x + \ln x\ dx$ h) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ i) $\int_1^\infty \left(\sqrt{x^3}\right)^{-1} dx$

j) $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$ k) $\int_{-\infty}^0 -4x^{-3}\,dx$ l) $\int_0^1 x + \frac{1}{4\sqrt{x}}\,dx$



8 a) Wie werden die obigen Integrale genannt? b) Welche alternativen Begriffe gibt es stattdessen?
c) Bestimmen Sie die jeweiligen *absoluten* Flächeninhalte bei den vorherigen Aufgaben c) – f).
d) Was lässt sich alles mit f′ und was mit F bestimmen?

9 Bestimmen Sie den von f und g eingeschlossenen Flächeninhalt.

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = 2 - x^2$ b) $f(x) = x^3$; $g(x) = x^2$

c) $f(x) = x^3$; $g(x) = x$ d) $f(x) = x^3 - 3x$; $g(x) = 2x^2$

e) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$; $g(x) = -x^2 + 7$ f) $f(x) = 0{,}5(x-2)^2 + 3{,}5$; $g(x) = x + 3$

10 Bestimmen Sie die beiden Volumina, die beim Rotieren von f um die x-Achse bzw. die y-Achse entstehen.

a) $f(x) = 0{,}5x^2 + 1$ [0; 3] b) $f(x) = \frac{-6}{x}$ [-6; -1] c) $f(x) = 1 + \ln(x)$ [1; e]

---

* **Achtung**: Die obige, rot markierte orientierte Fläche liegt *oberhalb der x-Achse* und hat den Wert $+1{,}1\overline{6}$. Der einzelne Stammfunktionswert F(–1) liefert jedoch „$-1{,}1\overline{6} + c$“. Nur Stammfunktionsdifferenzen „F(b)–F(a)“ können orientierte Flächeninhalt ohne c und mit richtigem Vorzeichen liefern, und auch nur dann, wenn die untere Integralgrenze a kleiner als b ist, es muss also immer von links nach rechts integriert werden: $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = +1{,}1\overline{6}$.