

Fläche gesucht

Ziel Den Flächeninhalt aller krummlinig-begrenzten Figuren bestimmen können.

Beispiel Die 4 Aufgabentypen des Kapitels

F ges.	Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f: y = 0,5x^2 - 2x$.	$F(x) = \left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + c \right]$
∫ ges.	Bestimmen Sie den orient. Flächeninhalt zwischen f und x Achse von 1 bis 6.	$\int_1^6 \frac{1}{2}x^2 - 2x \, dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + c \right]_1^6 = 0,8\bar{3} \, LE^2$
A ges.	Bestimmen Sie den absolut. Flächeninhalt a) von 1 bis 6 b) zw. f und g ($g: y = 2 - 2x - 1,5x^2$) c) von 1 bis ∞ ($f: y = x^{-2}$)	a) $A = \left \int_1^4 f \, dx \right + \left \int_4^6 f \, dx \right = [F(x)]_1^4 + [F(x)]_4^6 = 9,8\bar{3} \, cm^2$ b) $A = \left \int_{-1}^1 2x^2 - 2 \, dx \right = \left \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x + c \right]_{-1}^1 \right = 2,6 \, LE^2$ c) $A = \left \int_1^\infty x^{-2} \, dx \right = \left [-x^{-1} + c]_1^\infty \right = \left -\frac{1}{\infty} - (-1^{-1}) \right = 1 \, LE^2$
V ges.	Bestimmen Sie das Volumen von 0 bis 4, wenn $f: y=x+2$ um die x -Achse rotiert.	$V = \pi \int_0^4 (x+2)^2 \, dx = \pi \left[\frac{1}{3}(x+2)^3 + c \right]_0^4 = \pi \left(72 - \frac{8}{3} \right) \approx 217,82 \, LE^3$

Merke

Wie ermittelt man?	1) die Stammfunktion F <i>Was liefert F?</i>	Mit Kehrwert des <i>neuen</i> Exponenten multiplizieren; Probe durchführen: F' muss wieder f ergeben. Den unbest. orientierten Flächeninhalt (c, untere Grenze und Vorzeichen noch unbestimmt)*.
	2) den <i>orient.</i> Flächeninhalt \int	$\int_{-3}^5 f \, dx = F(5) - F(-3)$ c fällt weg! Achtung, zuerst die obere Grenze einsetzen!
	3a) den <i>absoluten</i> Flächeninhalt A	(i) Nullstellen $n_{1,2,\dots}$ bestimmen mit $f=0$ (ii) $A = \left \int_a^{n_1} f \, dx \right + \left \int_{n_1}^b f \, dx \right $
	b) die <i>eingeschl. absol.</i> Fläche A <i>Schnittwinkel?</i>	(i) Schnittstellen s_1, s_2 bestimmen mit $f=g$ (ii) $A = \left \int_{s_1}^{s_2} (f-g) \, dx \right $ Schnittwinkel: $\alpha = \tan^{-1} f'(s) - \tan^{-1} g'(s)$
	c) die <i>uneigentl. absol.</i> Fläche A	$A = \left \int_1^\infty f \, dx \right $ Ergibt sich ein endlicher Flächeninhalt?
	4) das Volumen V	$V = \pi \int_1^6 f^2 \, dx$ um die x-Achse $V = \pi \int_2^7 (f^{-1})^2 \, dx$ um die y-Achse

Schreib-/Sprechweise

	$F(x)$ ← integrieren „aufleiten“	$f(x)$ → differenzieren ableiten	$f'(x)$
Beispiel	$\frac{1}{3}x^3 + c$	x^2	$2x$
Name	Stammfunktion Flächen-/Integralfunktion*	urspr. Funktion	Ableitungsfunktion Steigungs-/Differentialfunktion
Schreibweise des Übergangs	$\int x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + c \right]$		$\frac{d}{dx} x^2 = 2x$

Stammfkt
unbest. Integral
Integralfkt
best. Integral
uneigentl. Integral

Übung

- 7** a) $\int 0,5x^3 - 2x^2 + x - 1 \, dx$ b) $\int_{-2}^x -t^2 + 5t + 6 \, dt$ c) $\int_2^6 (x^2 - 4x) \, dx$
d) $\int_1^3 (2x^2 + 2x - 4) \, dx$ e) $\int_{-1}^3 (x^2 + 8x - 4) \, dx$ f) $\int_0^2 (x^3 - 2x) \, dx$
g) $\int_1^\infty 3t^3 - 2\sqrt{t} + \frac{5}{t^2} \, dt$ h) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx$ i) $\int_1^\infty (\sqrt{x^3})^{-1} \, dx$
j) $\int_{-\infty}^0 e^x \, dx$ k) $\int_{-\infty}^0 -4x^{-3} \, dx$ l) $\int_0^1 x + \frac{1}{4\sqrt{x}} \, dx$

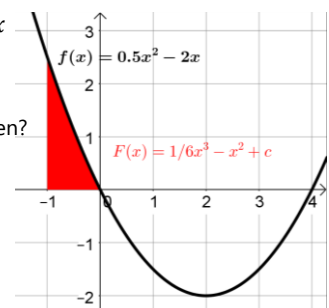
- 8** a) Wie werden die obigen Integrale genannt? b) Welche alternativen Begriffe gibt es stattdessen?
c) Bestimmen Sie die jeweiligen *absoluten* Flächeninhalte bei den vorherigen Aufgaben c) - f).

9 Bestimmen Sie den von f und g eingeschlossenen Flächeninhalt.

- a) $f(x) = x^2$; $g(x) = 2 - x^2$ b) $f(x) = x^3$; $g(x) = x^2$
c) $f(x) = x^3$; $g(x) = x$ d) $f(x) = x^3 - 3x$; $g(x) = 2x^2$
e) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$; $g(x) = -x^2 + 7$ f) $f(x) = 0,5(x-2)^2 + 3,5$; $g(x) = x + 3$

10 Bestimmen Sie die beiden Volumina, die beim Rotieren von f um die x -Achse bzw. die y -Achse entstehen.

- a) $f(x) = 0,5x^2 + 1$ [0; 3] b) $f(x) = \frac{-6}{x}$ [-6; -1] c) $f(x) = 1 + \ln(x)$ [1; e]



* **Achtung:** Die obige, rot markierte orientierte Fläche liegt *oberhalb der x-Achse* und hat den Wert $+1,1\bar{6}$. Der einzelne Stammfunktionswert $F(-1)$ liefert jedoch „ $-1,1\bar{6} + c$ “. Nur Stammfunktionsdifferenzen „ $F(b) - F(a)$ “ können orientierte Flächeninhalt ohne c und mit richtigem Vorzeichen liefern, und auch nur dann, wenn die untere Integralgrenze a kleiner als b ist, es muss also immer von links nach rechts integriert werden: $\int_{-1}^0 f(x) \, dx = F(0) - F(-1) = +1,1\bar{6}$.