Denkfallen vermeiden – Am Beispiel des Umtauschproblems

STEFAN BARTZ, MECKEL

Zusammenfassung: *Am Beispiel des sehr bekannten Umtauschproblems (Falk 2008) werden typische Denkfallen der Schulstochastik erläutert und gezeigt, wie sie vermieden werden können. Gleichzeitig eignet sich das Umtauschparadoxon besonders gut, um ein tieferes Verständnis im Umgang mit bedingten und totalen Erwartungswerten zu vermitteln.*

Das Umtauschproblem

Das Problem wird aus didaktischen Gründen in eine Gameshow eingekleidet. Schüler sollen sich die Situation so besser vorstellen können und Parallelen zum Ziegenproblem erkennen.

Im Finale einer Gameshow sind hinter zwei Türen Geldbeträge deponiert, hinter der einen doppelt so viel wie hinter der anderen. Ich als Kandidat darf eine Tür öffnen und den Betrag entnehmen. Danach darf ich entscheiden, ob ich das Geld behalte oder zur anderen Tür wechsle (Grams 2008).

Was soll ich in solchen Situationen tun?

- immer wechseln?
- nie wechseln, da es nichts „bringt“?
- nur bei bestimmten Beträgen wechseln?

Die hier gesuchte Gewinnerwartung des Immer-Wechsel- bzw. des Nie-Wechsel-Ereignisses wird im Folgenden mit E(W) bzw. $E(\overline{W})$ bezeichnet.

Argumentation 1 $E(W) = 1{,}25\ B > B = E(\overline{W})$

Angenommen ich finde hinter der ersten gewählten Tür einen Betrag B = 100 €. Dann befinden sich hinter der anderen entweder 200 € oder 50 € – jeweils mit 50%-iger Wahrscheinlichkeit. D.h. beim Wechseln erhalte ich in 50% der Fälle 200 € und in 50% der Fälle 50 €, im Schnitt also 125 €:

$$0{,}5 \cdot 200\ € + 0{,}5 \cdot 50\ € = 125\ €$$

Das ist mehr als die anfangs gefundenen 100 €, die ich ohne Wechseln erhalte. Egal welchen Betrag B ich zunächst finde, beim Verdoppeln von B kommt immer mehr hinzu als beim Halbieren wegfällt:

$$0{,}5 \cdot 2B + 0{,}5 \cdot B/2 = 1{,}25\ B$$

Im Mittel bewirkt dies eine höhere Gewinnerwartung. Ich sollte also auf jeden Fall immer wechseln.

Argumentation 2 $E(W) = 1{,}5\ B = E(\overline{W})$

Es hat sich bei der 2. Entscheidung gegenüber der 1. Entscheidung nichts geändert. Ich kann auch hier wieder Pech haben und den kleineren Betrag B erwischen oder Glück haben und die Tür mit dem Betrag 2B wählen. Mit dem Wechseln zur anderen Tür kann ich meine Gewinnerwartung nicht steigern. Oder mit anderen Worten: Setzte ich anfangs zufällig auf 2B, verliere ich durch Wechseln 1B, setzte ich zufällig auf B, gewinne ich 1B hinzu. Im Schnitt hat das Wechseln keinen Vorteil gegenüber dem Nicht-Wechseln. Meine Gewinnerwartung beträgt immer 1,5 B:

$$0{,}5 \cdot 2B + 0{,}5 \cdot B = 1{,}5\ B$$

Argumentation 3 $E(W) = E(\overline{W})$

Hier wird ebenfalls, auf indirektem Wege, Argumentation 1 widersprochen und festgestellt, dass eine Immer-Wechsel-Strategie keine höhere Gewinnerwartung als eine Nie-Wechsel-Strategie haben kann. Denn wäre Argumentation 1 richtig und würde ein Wechsel meine Gewinnerwartung *immer*, unabhängig vom anfänglich gefundenen Betrag, steigern, dann müsste ich mir diesen ersten gewählten Betrag gar nicht erst anschauen und könnte in Gedanken direkt zur anderen Tür wechseln. Bereits durch das "gedankliche Wechseln" würde meine Gewinnerwartung steigen. Mehr noch: Nach dem einmaligen "gedanklichen Wechsel" könnte ich Argument 1 erneut auf den Betrag hinter der neuen Tür anwenden und müsste vernünftigerweise daraufhin zurückwechseln, mit nochmals höherer Gewinnerwartung. Es käme zu der paradoxen Situation, dass permanentes "gedankliches Wechseln" die Gewinnerwartung immer weiter steigern würde. Da dies nicht sein kann, müssen E(W) und $E(\overline{W})$ gleich groß sein.

Fragen

- Wo genau liegen Denkfehler in diesen Argumentationen?
- Beträgt die Gewinnerwartung nun 1,25 B oder 1,5 B?
- Ist es tatsächlich so, dass "gedankliches Wechseln" nie zu einer höheren Gewinnerwartung führen kann?
- Wie sollten solche Aufgaben im Schulunterricht behandelt werden, damit derartige Unsicherheiten möglichst vermieden werden?

Denkfehler

Falsche Verwendung der Variablen B

Einer der Denkfehler ist relativ schnell gefunden, wenn man sich fragt, wofür die Variable B steht. In Argumentation 2 meint man damit immer den *kleineren* der beiden deponierten Beträge. In Argumentation 1 versteht man darunter jedoch den nach dem Öffnen der ersten Tür *gefundenen* Betrag; das kann der kleinere, kann jedoch auch der größere der beiden deponierten Beträge sein. Nennen wir diesen *gefundenen* Betrag im Weiteren also nicht mehr B, sondern G. Die oben berechneten Erwartungswerte betragen somit 1,25 G und 1,5 B.

Falsche Bezeichnung der Gewinnerwartung

Der zweite Denkfehler ergibt sich aus der Überlegung, welche Gewinnerwartung denn genau in Argumentation 1 und 2 bestimmt werden soll. Einmal geht es um die Gewinnerwartung *nachdem* die erste Tür aufgemacht worden ist, G also bekannt ist, und einmal um die Gewinnerwartung *bevor* die erste Tür aufgemacht worden ist und man lediglich weiß, dass ein Geldpaar {B; 2B} zur Wahl steht. Die beiden Erwartungswerte beziehen sich also auf unterschiedliche Zeitpunkte des Zufallsvorgangs. Folglich müssen auch hier exaktere Bezeichnungen verwendet werden: Statt E(W) genauer:

$$E(W|\,G) = 1{,}25\,G \quad \text{und} \quad E(W|\{B;\,2B\}) = 1{,}5\,B$$

Wir haben es also nicht – wie die ursprüngliche Schreibweise vermuten lässt – mit totalen, sondern mit bedingten Erwartungswerten zu tun, die sich auf unterschiedliche Zeitpunkte der Gameshow beziehen.

Randwerte nicht beachtet

In Argumentation 1 wird fälschlicherweise behauptet, dass die Gleichung

$$E(W|G) = 0{,}5\cdot G + 2\cdot G = 1{,}25\,G$$

für alle möglichen gefundenen Beträge G gelte. Man übersieht jedoch, dass für den höchstmöglichen Gewinnbetrag (den maximalen Gewinn, den die Produzenten der Show bereit sind auszugeben) diese Gleichung nicht gilt. Trifft man in der Gameshow auf diesen Betrag G_{max}, so ist die Wahrscheinlichkeit für eine Verdopplung gleich 0 und ein Wechsel führt immer zu einer Halbierung:

$$E(W|G_{max}) = 0{,}5\,G_{max}$$

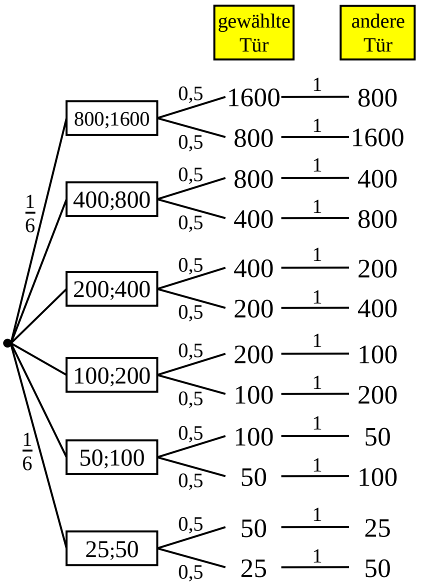
Dieser hohe Wechselverlust beim höchsten Wert bewirkt, dass *insgesamt* die Gewinnerwartung im Wechselfall nicht höher ist als die im Nichtwechselfall. Argumentation 1 ist somit widerlegt und damit auch das angesprochene Paradoxon des vorteilhaften "gedanklichen Wechselns".

Empfohlener Lösungsweg

Lösungen gemäß Argumentation 1-3 sind für Schüler oft verwirrend und es bleiben Unsicherheiten zurück. Vielen bereitet es Schwierigkeiten selbst auf derartige Lösungen zu kommen. Daher wird hier der Weg über das vertraute Baumdiagramm empfohlen.

Damit die jeweiligen Erwartungswerte konkret berechnet werden können, muss das Verfahren, mit dem die Macher der Show die Höhe der zu verteilenden Geldbeträge bestimmen, bekannt sein. Es sei dazu angenommen, dass sie die Beträge mit Hilfe eines Würfels ermitteln. Zeigt der Würfel die Augenzahl a, so werden die Beträge $25\cdot 2^{a-1}$ € und $25\cdot 2^{a}$ € hinter den beiden Türen deponiert. Bei a=1 also {25€; 50€} und bei a=6 {800€; 1600€}.

Das zugehörige Baumdiagramm für den Wechselfall sieht dann wie folgt aus (für den Nichtwechselfall muss lediglich die letzte Stufe ausgeblendet werden):



Damit lassen sich die totalen Gewinnerwartungen leicht bestimmen. Und man erkennt schnell, dass die Immer-Wechsel-Strategie und die Nie-Wechsel-Strategie zu gleichen Werten führen:

$$\begin{aligned} E(W) &= P(25)\cdot 25 + P(50)\cdot 50 + \ldots + P(800)\cdot 800 + P(1600)\cdot 1600 \\ &= \tfrac{1}{12}\cdot 25 + \tfrac{2}{12}\cdot 50 + \ldots + \tfrac{2}{12}\cdot 800 + \tfrac{1}{12}\cdot 1600 \\ &= \underline{393{,}75\text{ €}} = E(\overline{W}) \end{aligned}$$

Will man zusätzlich die bedingten Erwartungswerte aus Argumentation 1 berechnen und prüfen, ob diese (ausgenommen der Randbeträge) tatsächlich 1,25 G betragen, benötigt man für z. B. G = 100 € die bedingten Wahrscheinlichkeiten, dass man letztendlich 200 € bzw. 50 € gewinnt, falls zunächst 100 € gefunden wurden:

$$E(W|100) = P(200|100)\cdot 200 + P(50|100)\cdot 50$$
$$= \frac{P(200\cap 100)}{P(100)}\cdot 200 + \frac{P(50\cap 100)}{P(100)}\cdot 50$$
$$= \frac{1/12}{2/12}\cdot 200 \quad + \quad \frac{1/12}{2/12}\cdot 50$$
$$= 0{,}5\cdot 200 \quad + \quad 0{,}5\cdot 50$$
$$= \underline{125\text{ €}} \qquad = 1{,}25\cdot 100\text{ €} \ \checkmark$$

Bemerkung: Die totale Gewinnerwartung hätte auch mit Hilfe der bedingten berechnet werden können (Satz des totalen Erwartungswerts):

$$E(W) = \sum E(W|B_i)\cdot P(B_i)$$
$$= E(W|25)\cdot P(25) + \ldots + E(W|1600)\cdot P(1600)$$
$$= 50\cdot\tfrac{1}{12} + 62{,}5\cdot\tfrac{2}{12} + 125\cdot\tfrac{2}{12} + \ldots + 800\cdot\tfrac{1}{12}$$
$$= \underline{393{,}75\text{ €}} \text{ f}$$

Will man auch die bedingten Erwartungswerte aus Argumentation 2 berechnen und prüfen, ob sie 1,5 B betragen, rechnet man analog:

$$E(W|\{25;50\}) = P(25|\{25;50\})\cdot 25 + P(50|\{25;50\})\cdot 50$$
$$= 0{,}5\cdot 1\cdot 25 \quad + \quad 0{,}5\cdot 1\cdot 50$$
$$= \underline{37{,}5\text{ €}} \qquad = 1{,}5\cdot 25\text{ €} \ \checkmark$$

Fazit: Egal wie argumentiert wird, ob mit der totalen Gewinnerwartung oder mit einer der beiden bedingten Gewinnerwartungen: Die Immer-Wechsel-Strategie ist der Nie-Wechsel-Strategie nicht überlegen. Der Wechselverlust beim höchsten Betrag wiegt die durchschnittlichen Wechselgewinne bei den anderen Beträgen exakt auf.

Bemerkung: Gleichwohl kann eine *Manchmal-Wechsel-Strategie* zur höheren Gewinnerwartung führen. Macht man die Wechselentscheidung vom vorgefundenen Betrag G abhängig und wechselt z.B. unter 500 € immer und ab 500 € nie (weil man etwa vermutet, dass die Produzenten nicht mehr als 500 € einsetzen, oder weil man mit 500 € bereits so zufrieden ist, dass man das Wechselrisiko nicht mehr in Kauf nehmen will), so lässt sich die Gewinnerwartung steigern:

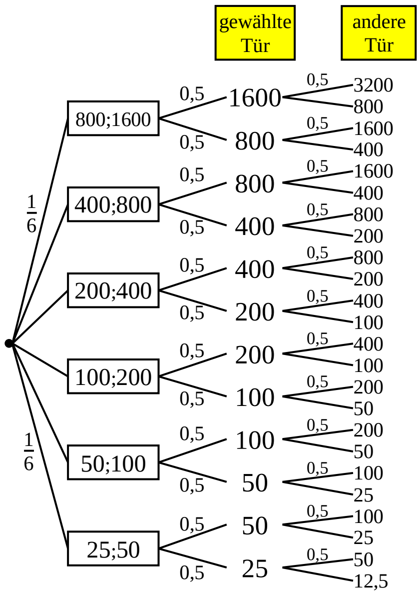
$$E(W \text{ nur, falls } G < 500) = \tfrac{2}{12}\cdot(50+100+200) +$$
$$\tfrac{3}{12}\cdot 800 + \tfrac{1}{12}\cdot(25+1600+400) = \underline{427{,}08\text{ €}}$$

Rettungsversuch des Paradoxons

Höchster Betrag verdoppelbar

Nachdem die Denkfehler aufgeklärt sind und die Aufgabe anschaulich gelöst worden ist, kann man weiter fragen, ob sich die Show nicht so abändern lässt, dass auch für den höchstmöglichen Betrag die Gewinnerwartung im Wechselfall steigt und so insgesamt eine Immer-Wechsel-Strategie doch noch vorteilhaft wird.

Eine Variation der Show könnte z. B. so aussehen, dass, nachdem der Kandidat eine Tür geöffnet hat, der Betrag hinter der anderen Tür durch Mitarbeiter der Show so verändert wird, dass dort entweder die Hälfte oder das Doppelte des *zuvor gefundenen* Betrages liegt (ermittelt durch Münzwurf). Danach darf der Kandidat wieder entscheiden, ob er das ursprünglich gefundene Geld behält oder zum anderen (evtl. veränderten) Betrag wechselt.



Argumentation 1 gilt nun für alle gefundenen Beträge G, also E(W|G) = 1,25G. Wenn bei allen möglichen gefundenen Beträgen die bedingte Gewinnerwartung im Wechselfall um 25% zunimmt, muss sich dies auch bei der totalen zeigen. Auch dort stellen wir beim Immer-Wechselfall eine 25%-ige Überlegenheit fest:

$$E(W) = \tfrac{1}{24}\cdot 12{,}5 + \tfrac{2}{24}\cdot 25 + \tfrac{3}{24}\cdot 50 + \ldots + \tfrac{1}{24}\cdot 3200 = \underline{492{,}19\text{€}}$$
$$E(\overline{W}) = \tfrac{1}{12}\cdot 25 + \tfrac{2}{12}\cdot 50 + \tfrac{2}{12}\cdot 100 + \ldots + \tfrac{1}{12}\cdot 1600 = \underline{393{,}75\text{€}}$$

Argumentation 2 liefert diesen 25%igen Zuwachs ebenfalls. Angenommen *vor* meiner Wahl sind hinter den Türen die Beträge B und 2B deponiert. Die entsprechenden bedingten Gewinnerwartungen ergeben sich dann mit:

$$E(W|\{B;2B\}) = 0{,}25\cdot(4B+B+2B+0{,}5B) = 1{,}875B$$
$$E(\overline{W}|\{B;2B\}) = 0{,}5\cdot B + 0{,}5\cdot 2B = 1{,}5B$$

Auch wenn der Vorteil des Wechselns für alle Beträge nun sichergestellt ist und bei diesem neuen Spiel die Immer-Wechsel-Strategie überlegen ist, so wurde gleichzeitig die Möglichkeit des vorteilhaften "gedanklichen Wechselns" zerstört. Er ist nicht mehr möglich, da Mitarbeiter *nach* der ersten Türwahl – abhängig vom gefundenen Betrag – in den Spielablauf eingreifen müssen. Unternehmen wir einen weiteren Rettungsversuch.

Kein höchster Betrag

Kehren wir zur ursprünglichen Gameshow zurück, gehen aber jetzt von der (realitätsfernen und nur theoretisch interessanten) Vorstellung aus, dass es keinen höchstmöglichen Betrag gebe, dass die vorhandene Geldmenge also nicht begrenzt sei. Wir gehen also davon aus, dass die Macher der Show nach einem bestimmten Zufallsverfahren handeln, bei dem auch extrem hohe Beträge mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ausgelost werden können und hinter den Türen deponiert werden. Ohne einen höchsten Betrag müssten folglich die bedingten Gewinnerwartungen E(W|G) für *alle* möglichen gefundenen Beträge G im Wechselfall steigen. Und die paradoxe Idee des gewinnbringenden "gedanklichen Wechselns" wäre gerettet.

Der Zufallsversuch, nach dem die Produzenten dann handeln müssten, müsste sicherstellen, dass unendlich viele Geldpaare {B; 2B} mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p_B zum Einsatz kämen. Diese p_B müssten nicht alle gleichgroß sein (im obigen Bespiel betrug diese Wahrscheinlichkeit immer 1/6). Es genügte, wenn die Bedingung $p_B > 0{,}5 \cdot p_{B/2}$ für alle möglichen Paare {B; 2B} sichergestellt wäre (s. Kasten unten).

Auch wenn es Verteilungen gibt, bei denen diese Bedingung für alle möglichen (unendlich vielen und beliebig großen) Geldpaare erfüllt ist, so besitzen diese Verteilungen keine endlich großen Erwartungswerte. Der Erwartungswert ist somit nicht definiert und der Zusammenhang $E(W|G) > E(\overline{W}|G)$ aus formalen Gründen nicht mehr gewährleistet. Folglich entsteht selbst im theoretischen Fall der unbegrenzt zur Verfügung stehen Geldmenge kein Widerspruch (s. Wikipedia 2010).

Verteilungsbedingung, damit Wechseln immer vorteilhaft ist: Angenommen, die Show-Macher würden die Geldbeträge {B; 2B} mit der Wahrscheinlichkeit p_B und {B/2; B} mit der Wahrscheinlichkeit $p_{B/2}$ hinter den Türen verstecken. Eine Immer-Wechsel-Strategie wäre dann vorteilhaft, wenn für alle möglichen gefundenen Beträge G gilt:

$$
\begin{aligned}
& E(W|G) > E(\overline{W}|G) \\
\Leftrightarrow\ & P(\{G;2G\}|G)\cdot 2G + P(\{G/2;G\}|G)\cdot G/2 > G \\
\Leftrightarrow\ & \frac{P(\{G;2G\}\cap G)}{P(G)}\cdot 2 + \frac{P(\{G/2;G\}\cap G)}{P(G)}\cdot 0{,}5 > 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{p_B\cdot 0{,}5}{p_B\cdot 0{,}5+p_{B/2}\cdot 0{,}5}\cdot 2 + \frac{p_{B/2}\cdot 0{,}5}{p_B\cdot 0{,}5+p_{B/2}\cdot 0{,}5}\cdot 0{,}5 > 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{p_B + 0{,}25p_{B/2}}{p_B\cdot 0{,}5+p_{B/2}\cdot 0{,}5} > 1 \\
\Leftrightarrow\ & p_B + 0{,}25p_{B/2} > 0{,}5p_B + 0{,}5p_{B/2} \\
\Leftrightarrow\ & p_B > 0{,}5 \cdot p_{B/2}
\end{aligned}
$$

Fazit

Es gibt Entscheidungsspiele, bei denen eine *Wechsel-Strategie* keinen Vorteil bringt, und es gibt Spiele, bei denen eine *Manchmal-* oder sogar eine *Immer-Wechsel-Strategie* vorteilhaft sind. Um solche Spiele zu realisieren, muss jedoch zwischendurch – also vor der möglichen Wechselentscheidung – in den Spielverlauf eingegriffen werden. Dies kann z. B. geschehen, indem vorher unbekannte Informationen preisgegeben werden (s. Umtausch- oder Ziegenproblem) oder indem die Gewinnbeträge verändert werden (s. obige Variante des Umtauschproblems). Solche notwendigen Eingriffe schließen aus, dass durch "gedankliches Wechseln" Gewinnerwartungen gesteigert werden.[1]

Das Umtauschparadoxon "lebt" davon,

- → dass nicht erkannt wird, dass es sich bei Argumentation 1 und 2 um bedingte und keine totalen Gewinnerwartungen handelt und dass sich beide Gewinnerwartungen auf unterschiedliche Zeitpunkte des Vorgangs beziehen.
- → dass nicht erkannt wird, dass es einen obersten Betrag geben muss und dass die bedingte Gewinnerwartung von 1,25 G für diesen Betrag nicht gilt.

Alle Denkfallen lassen sich durch die Anfertigung eines Baumdiagramms vermeiden und aufdecken. Durch das Baumdiagramm muss der betrachtete Zufallsvorgang systematisch in einzelne Schritte zerlegt werden und es entsteht ein vollständiger Überblick über alle möglichen Ausgänge – bereits das verringert die Unsicherheit deutlich. Hinzu kommt, dass bedingte Wahrscheinlichkeiten direkt abgelesen werden können und ersichtlich wird, auf welches Vorereignis sie sich jeweils beziehen. Bedingte Wahrscheinlichkeiten werden so weniger leicht fehlinterpretiert – die Ursache vieler Trugschlüsse.

Baumdiagramme spielen eine Schlüsselrolle beim sicheren Lösen von Wahrscheinlichkeitsproblemen; nicht nur bei bedingten Wahrscheinlichkeiten sondern in der gesamten Schulstochastik, bis hin zu den Themen "Testen und Schätzen von Wahrscheinlichkeiten" (Bartz 2008). Es ist zu wünschen,

[1] Ein vierter Denkfehler wurde im Artikel nicht angesprochen. In Argumentation 2 wird behauptet, dass sich bei der Wechselentscheidung gegenüber der 1. Entscheidung nichts verändert habe. Dem ist jedoch nicht so. Man *kennt* bei der Wechselentscheidung die Höhe des gefundenen Betrags G. Genau *diese* zusätzliche Information ist dafür verantwortlich, dass eine *Manchmal-Wechsel-Strategie* vorteilhaft werden kann (s. Humenberger 2009).

dass das Potential der Baumdiagramme in der Didaktik noch stärker als bisher genutzt wird.

Literatur mit Anmerkungen

Bartz S. (2008): Baumdiagramme als roter Faden der Schulstochastik. In: *Stochastik in der Schule* 28(1). www.stefanbartz.de/materialien.htm

Falk R. (2008): The Unrelenting Exchange Paradox. In: *Teaching Statistics* 30(3). Übersetzt von Warmuth E. (2009). Das unerbittliche Tauschparadoxon In: *Stochastik in der Schule* 29(3).

Grams T. (2008): www2.hs-fulda.de/~grams/dnkfln.htm. Die Formulierung des Problems wurde von dieser sehr lesenswerten Website, die eine ganze Sammlung stochastischer Denkfallen und Paradoxa enthält, übernommen.

Humenberger H. (2009): Das Zwei-Zettel-Spiel – ein Paradoxon und einige seiner Verwandten In: *Stochastik in der Schule* 29(2). In diesem interessanten und weitreichenden Aufsatz wird u.a. darauf eingegangen, wie mit Hilfe von geeigneten Zufallszahlen bzw. mit vorher festgelegten Werten eine geschickte *Manchmal-Wechsel-Strategie* realisiert werden kann.

Wikipedia (21.5.2010): de.wikipedia.org/wiki/Umtausch paradoxon. Die Darstellung des zweiten Rettungsversuchs lehnt sich an die der Wikipediaversion an.