Euler entdeckt $e^{x\cdot i} = \cos x + i\cdot\sin x$

Von unendlichen Potenzreihen und komplexen Zahlen

Euler kennt wichtige unendliche Potenzreihen

$$e^x = \left(1+\frac{x}{\infty}\right)^{\infty}$$

$$e^x = \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots$$

$$\cos x = \frac{x^0}{0!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$$

$$\sin x = \frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = x^0+x^1+x^2+\ldots \quad \Big| \int$$

$$-\ln(1-x) = \frac{x^1}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$$

* √–Werte mit dem Newtonverf.
** entdeckt von Newton 1664

Die links notierten 6 Gleichungen spielen in der Mathematik eine große Rolle. Über sie werden die *e-*, *sin-*, *cos-* und *ln-*Werte im TR ermittelt.*

- **Wie hat Bernoulli die obere Gleichung entdeckt?**

  Monatliche Verzinsung zu 8%: $1€\cdot\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12} \approx 1{,}0829$ €

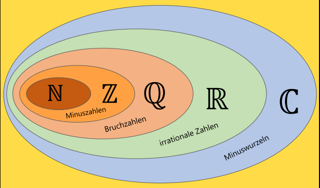
  Tägliche Verzinsung zu 8%: $1€\cdot\left(1+\frac{0.08}{365}\right)^{365} \approx 1{,}0832$ €

  Stetige Verzinsung zu 8%: $1€\cdot\left(1+\frac{0.08}{\infty}\right)^{\infty} \approx 1{,}0833\ € = e^{0.08}$
- **Wie hat Taylor die nächsten 3 Gleichungen hergeleitet?****
  Er versucht, die schwer berechenbare Funktion *exp:* $y=e^x$ durch eine leicht berechenbare Fkt *p:* $y = ax^0+bx^1+cx^2+dx^3$ vom Grad 3 anzunähern und fordert: $p(0)=\exp(0)$, $p'(0)=\exp'(0)$, $p''(0)=\exp''(0)$, $p'''(0)=\exp'''(0)$. So entsteht 1=a=b=2c=6d, also $e^x \approx 1+\frac{x^1}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$, und bei zunehmendem Grad die angegebene unendliche Potenzreihe. Die Fakultäten im Nenner entstehen also durch die Mehrfachableitungen von p.
- **(zu cos u. sin):** Als Eselsbrücke kann man sich merken, dass die cos-Funktion aus den geraden und die si**n**-Funktion aus den u**n**geraden Reihenglieder der e-Potenzreihe besteht (mit jeweils alternierenden Vorzeichen). In Taschenrechnern müssen aus Periodizitätsgründen nur die sin- und cos-Werte im Intervall $0<x<0{,}5\pi$ berechnet werden. Bereits die ersten 3 Reihenglieder liefern dort schon sehr gute Näherungswerte.
- **(zu 5):** Die geometrische Potenzreihe wurde wahrscheinlich von den **Pythagoreern** in der Musik entdeckt. Bei einer Tonfolge mit gleichen Intervallen (z.B. Oktaven) bilden die zu greifenden Seitenlängen eine solche Reihe. Die Gleichung gilt natürlich nur für $-1 < x < 1$.
- **Gleichung 6** entsteht, wenn man (5) auf beiden Seiten integriert. → überprüfen!
  Viele Taschenrechner berechnen über diese Gleichung die Logarithmuszahlen. Es stört dabei nicht, dass sie nur für $-1 < x < 1$ gilt, da beim 10er-Logarithmus jede Zahl entsprechend umgeformt werden kann: $\log 1748 = \log 0{,}1748\cdot 10^4 = \log 0{,}1748 + 4$.

Wie erfährt Euler von diesen unendlichen Potenzreihen?
Euler studiert bei Johann Bernoulli, einem Freund seines Vaters. Die Bernoulli-Brüder gehören zu den führenden Mathematikern Europas. Sie wenden als erste die neue Analysis von Newton & Leibniz an. Sie kennen auch die Arbeit von Taylor, der in Cambridge bei Newton studiert.

Euler kann mit komplexen Zahlen rechnen

Idee



- Was sind komplexe Zahlen und wie kann man sie veranschaulichen? Ergänzt man die reellen Zahlen durch die „Minuswurzeln" (Wurzeln mit negat. Radikanden), erhält man die komplexen Zahlen. Sie liegen ober- bzw. unterhalb der Zahlengeraden und müssen mit 2 Koordinaten dargestellt werden (wobei die neue Koordinatenachse i-Achse genannt und $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet wird).
- Wozu benötigt man Minuszahlen? Um jede lineare Gleichung lösen zu können.
  Wozu benötigt man Minuswurzeln? Um jede ganzrationale Gleichung lösen zu können.
  Lösen Sie die Gleichung $x^2 = -0{,}49$ und markieren Sie die Ergebniszahl auf der Zahlenebene.
  $x^2 = -0{,}49 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{0{,}49\cdot(-1)} \Leftrightarrow x = \pm 0{,}7i$ (Liegen auf der i-Achse, ober- bzw. unterhalb der 0)
- Wieso darf nur i^2 durch -1 und nicht i durch $\sqrt{-1}$ ersetzt werden? $-1 = i^2 = i\cdot i \neq \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$
- Wie hat man erkannt, dass das Rechnen mit Minuswurzeln sehr nützlich ist?
  Seit 1545 kennt man die Cardanische Formel, mit der man jede kubische Gleichung lösen kann. Die Formel liefert z.B. bei $x^3 - 15x - 4 = 0$ eine Minuswurzel. Rechnet man mit dieser sinnvoll weiter, erhält man die richtige Lösungszahl 4 (s. Aufg. 27).

3 Darstellungsformen		
kartes. Koord. Punkt-/Summenform	$(4\,|\,3)_K = 4 + 3i$	„4 nach rechts, 3 rechtwinklig nach oben"
Polarkoord. Punkt-/ e-Form	$(5\,|\,2)_P = 5\cdot e^{2i}$	„5 nach rechts, 2^{RAD} kreisförmig nach oben"
Mischkoord. cos-sin-Form	$(5\cdot\cos 2\,|\,5\cdot\sin 2)_K$	Polarkoord. 5 u. 2 sichtbar, das Ergebnis sind jedoch kart. Koord.
Umwandlung kartes. Koord. ↔ Polarkoord.	$(r\,|\,\varphi)_P = (r\cdot\cos\varphi\,|\,r\cdot\sin\varphi)_K$	$(5\,|\,2)_P = (5\cdot\cos 2\,|\,5\cdot\sin 2)_K \approx (-2{,}08|4{,}55)_K$
	$(a\,|\,b)_K = (\sqrt{a^2+b^2}\,|\,\pm\cos^{-1}\frac{a}{r})_P$ neg., falls b neg.	$(4\,|\,3)_K = (\sqrt{16+9}\,|\,\pm\cos^{-1}\frac{4}{5})_P \approx (5\,|0{,}64)_P$
Rechnen mit kartes. Koord. Strichrechnung leicht	$(a|b)_K + (c|d)_K = (a+c\,|\,b+d)_K$	$(a|b)_K \cdot (c|d)_K = (ac-bd\,|\,ad+bc)_K$ Ausmultiplizieren
	$(a|b)_K - (c|d)_K = (a-c\,|\,b-d)_K$	$(a|b)_K : (c|d)_K = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\,\Big|\,\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}\right)_K$ Erweitern mit c-di
Rechnen mit Polarkoord. Punktrechnung leicht	$(r|\alpha)_P + (s|\beta)_P =$ …zu kompliziert…	$(r|\alpha)_P \cdot (s|\beta)_P = (rs\,|\,\alpha+\beta)_P$
	$(r|\alpha)_P - (s|\beta)_P =$ …zu kompliziert…	$(r|\alpha)_P : (s|\beta)_P = (r{:}s\,|\,\alpha-\beta)_P$
$\bar{z}$ „z konjungiert"	• meint die an der reellen-Achse gespiegelte Zahl	$z = (4|3)_K \Rightarrow \bar{z} = (4|-3)_K$
$\lvert z\rvert$ „z Betrag"	• meint den Abstand zum Ursprung 0	$\lvert z\rvert = \sqrt{Realteil^2 + Imaginärteil^2} = 5$

Eulers Frage

Was „macht" die e-Funktion mit einer komplexen Zahl?

Eulers Entdeckung

$$e^{a+b\cdot i} = e^a \cdot e^{b\cdot i} = e^a \cdot \left(\frac{(bi)^0}{0!} + \frac{(bi)^1}{1!} + \frac{(bi)^2}{2!} + \frac{(bi)^3}{3!} + \frac{(bi)^4}{4!} + \frac{(bi)^5}{5!} \ldots\right)$$

$$= e^a \cdot \left(\frac{b^0 i^0}{0!} + \frac{b^1 i^1}{1!} + \frac{b^2 i^2}{2!} + \frac{b^3 i^3}{3!} + \frac{b^4 i^4}{4!} + \frac{b^5 i^5}{5!} \ldots\right) = e^a \cdot \left(\frac{b^0}{0!} + \frac{b^1 i}{1!} - \frac{b^2}{2!} - \frac{b^3 i}{3!} + \frac{b^4}{4!} + \frac{b^5 i}{5!} \ldots\right)$$

$$= e^a \cdot \left(\left(\frac{b^0}{0!} - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \cdots\right) + i \cdot \left(\frac{b^1}{1!} - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} \ldots\right)\right) = e^a \cdot (\cos b + i \cdot \sin b)$$

Die e-Funktion interpretiert die Minuswurzel $b{\cdot}i$ immer als Winkel und vollzieht mit dem komplexen Punkt eine Drehstreckung um den Winkel *b*: $(a|b)_K \to (e^a{\cdot}\cos b \mid e^a{\cdot}\sin b)_K$. Diese Drehstreckung entspricht nahezu derjenigen, die man zur Transformation von Polar- in kartes. Koordinaten benötigt: $(r|\varphi)_P \to (r{\cdot}\cos\varphi \mid r{\cdot}\sin\varphi)_K$.

Eulers Schlussfolgerung

→ Wenn man in die e-Funktion, statt kartes. Koordinaten $(a|b)_K$, Polarkoordinaten $(r|\varphi)_P$ geschickt einsetzt, ergibt sich exakt diese Transformations-Drehstreckung: $r{\cdot}e^{\varphi\cdot i} = r{\cdot}\cos\varphi + r{\cdot}i{\cdot}\sin\varphi$ *(Eulerformel 1748)*. Die e-Funktion kann so Polarkoordinaten in kartes. umwandeln. Das erlaubt folgende Schreibweise: $4 + 3i = 5{\cdot}e^{0,6435i} = 5{\cdot}\cos(0,6435) + 5i{\cdot}\sin(0,6435) = 4 + 3i$.

→ Die Eulerformel zeigt insbesondere, dass $(1 \mid \pi)_P = (-1|0)_K$ gilt, denn $1{\cdot}e^{i\cdot\pi} = 1{\cdot}\cos\pi + i{\cdot}1{\cdot}\sin\pi = -1$, was umgestellt $e^{\pi\cdot i} + 1 = 0$ ergibt. Auch wenn diese Gleichung zu keiner neuen Erkenntnis führt und direkt anhand der Zahlenebene ersichtlich ist, empfindet man sie als ausgesprochen „schön". Denn wer hätte gedacht, dass sich die 5 grundlegenden Konstanten der Mathematik (e, π, i, 0, 1) so schön u. klar miteinander verbinden lassen. Generell ist es überaus erstaunlich, dass die einfache e-Funktion imstande ist, Drehbewegungen auszuführen.

Übung

25 Wandeln Sie folgende Zahlen in die übrigen 4 Darstellungsformen um, markieren Sie sie in der Zahlenebene und beschriften Sie die notierten Punkte jeweils mit ihren kartesischen- und ihren Polarkoordinaten.

a) 3-2i b) i c) –i d) i^2

e) $\sqrt{-9}$ f) $\sqrt{-21}$ g) $\sqrt{13} - 2{,}5i$ h) 5

i) $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ j) $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ k) $2 \cdot e^{i\,4{,}5\pi}$ l) –3i

m) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

a)-e): $(3{,}61|-0{,}59)_P$ $(1|0{,}5\pi)_p$ $(1|-0{,}5\pi)_p$ $(-1|0)_K$ $(1|\pi)_p$ $(0|3)_K$ $(3|0{,}5\pi)_p$
f)-i): $(0|4{,}58)_K$ $(4{,}58|0{,}5\pi)_p$ $(3{,}61|-2{,}5)_K$ $(4{,}39|-0{,}61)_p$ $(5|0)_P$ $(5{,}5|3)_K$
j)-m): $(6{,}1|1{,}6)_K$ $(-1{,}3|-6{,}1)_K$ $(3|-1{,}57)_P$ $(3{,}3|3)_K$

26 Rechnen Sie möglichst geschickt, geben Sie das Ergebnis in kartesischen und Polarkoordinaten an und überprüfen Sie es mit wolframalpha.

a) $(3 + 4i) + (2 - 3i)$ b) $(-5 + 3i) + (5 - 5i)$

c) $(1 - 2i) - (-4 - i)$ d) $(6 + 5i) - (8 - 3i)$

e) $(-3 - 4i) \cdot (7 + 4i)$ f) $(3 + 2i) \cdot (6 - i)$

g) $9 \cdot e^{0,2i} \cdot 8 \cdot e^{-1,1i}$ h) $-4(-6 + 5i)$

i) $|7 + 6i| \cdot |-i|$ j) $9e^{0,2i} : 3e^{-1,1i}$

k) $\frac{1}{-2+8i}$ l) $\frac{-8+2i}{4-9i}$

a)-d): $(5|1)_K$ $(5{,}1|0{,}2)_P$ $(0|-2)_K$ $(2|-1{,}5)_P$ $(5|-1)_K$ $(5{,}1|-0{,}2)_P$ $(-2|8)_K$ $(8{,}3|-1{,}8)_P$
e)-g): $(-5|-40)_K$ $(40{,}3|-1{,}7)_P$ $(20|9)_K$ $(21{,}9|0{,}4)_P$ $(44{,}8|56{,}4)_K$ $(72|-0{,}9)_P$
h)-l): $(24|-20)_K$ $(31{,}2|-0{,}7)_P$ 9,22 $(0{,}8|2{,}9)_K$ $(3|1{,}3)_P$ $(-0{,}5|-0{,}7)_K$ $(0{,}8|-2{,}2)_P$

27 Im Folgenden wird eine kubische Gleichung m. H. der Cardanischen Formel gelöst:

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad |\text{Cardanische Formel s.u.}$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = (2+\sqrt{-121}\,)^{1/3} + (2-\sqrt{-121}\,)^{1/3}$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = (2+11\sqrt{-1}\,)^{1/3} + (2-11\sqrt{-1}\,)^{1/3} \qquad |\text{s. a)}$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = (2+\sqrt{-1}\,) + (2-\sqrt{-1}\,)$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 4}}$$

a) Zeigen Sie, dass $(2+11i)^{1/3} = (2+i)$ gilt.

b) Inwiefern hat die obige Lösung zur Entdeckung der komplexen Zahlen geführt?

a) „Hoch 3" auf beiden Seiten, dann Klammer rechts auflösen.
b) Da man durch Ausprobieren wusste, dass 4 eine Lösung sein muss, hat man versucht, mit $\sqrt{-121}$ der Cardanischen Formel „sinnvoll" weiterzurechnen und auf 4 zu kommen. So entdeckte man einerseits, dass Minuswurzelzahlen „existieren" (Naturvorgänge abbilden können) und andererseits, wie man mit ihnen rechnen muss.

Cardanische Formel

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad \Big|\ p := \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c \qquad q := b - \frac{a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3}$$

$$x_{2,3} = \ldots \quad \Big|\ \text{per Polynomdivision mit } x_1$$

(M1) Füller | Killer | Ersatzpatronen (O1) Locher | HA-Planer | Block | Register
(M2) Druckbleistift | Radierer | Ersatzminen (O2) Heft | Buch | Fehlbogen | Post-Its
(M3) 2 Fineliner | Textmarker | Lineal (++) TI-30X-Pro | Tempos
→ hängender Einzug → 2-farbig → kein Durchstreichen (löschbar) → leserlich