

# Euler entdeckt $e^{x \cdot i} = \cos x + i \cdot \sin x$

Von unendlichen Potenzreihen und komplexen Zahlen

## Euler kennt wichtige unendliche Potenzreihen

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{\infty}\right)^\infty$$

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\cos x = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = x^0 + x^1 + x^2 + \dots \quad | \int$$

$$-\ln(1-x) = \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

\*  $\sqrt{-}$ -Werte mit dem Newtonverf.  
\*\* entdeckt von Newton 1664

Die links notierten 6 Gleichungen spielen in der Mathematik eine große Rolle. Über sie werden die  $e$ -,  $\sin$ -,  $\cos$ - und  $\ln$ -Werte im TR ermittelt.\*

- Wie hat Bernoulli die obere Gleichung entdeckt?**  
 Monatliche Verzinsung zu 8%:  $1\text{€} \cdot \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{12} \approx 1,0829 \text{€}$   
 Tägliche Verzinsung zu 8%:  $1\text{€} \cdot \left(1 + \frac{0,08}{365}\right)^{365} \approx 1,0832 \text{€}$   
 Stetige Verzinsung zu 8%:  $1\text{€} \cdot \left(1 + \frac{0,08}{\infty}\right)^\infty \approx 1,0833 \text{€} = e^{0,08}$
- Wie hat Taylor die nächsten 3 Gleichungen hergeleitet?\***  
 Er versucht, die schwer berechenbare Funktion *exp*:  $y=e^x$  durch eine leicht berechenbare Fkt  $p: y = ax^0 + bx^1 + cx^2 + dx^3$  vom Grad 3 anzunähern und fordert:  $p(0)=\exp(0)$ ,  $p'(0)=\exp'(0)$ ,  $p''(0)=\exp''(0)$ ,  $p'''(0)=\exp'''(0)$ . So entsteht  $1=a=b=2c=6d$ , also  $e^x \approx 1 + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ , und bei zunehmendem Grad die angegebene unendliche Potenzreihe. Die Fakultäten im Nenner entstehen also durch die Mehrfachableitungen von  $p$ .
- (zu  $\cos$  u.  $\sin$ ):** Als Eselsbrücke kann man sich merken, dass die  $\cos$ -Funktion aus den geraden und die  $\sin$ -Funktion aus den ungeraden Reihenglieder der  $e$ -Potenzreihe besteht (mit jeweils alternierenden Vorzeichen). In Taschenrechnern müssen, aus Periodizitätsgründen, nur die  $\sin$ - und  $\cos$ -Werte im Intervall  $0 < x < 0,5\pi$  berechnet werden. Bereits die ersten 3 Reihenglieder liefern dort schon sehr gute Näherungswerte.
- (zu 5):** Diese „Grund-Potenzreihe“ wurde wahrscheinlich von den **Pythagoreern** in der Musik entdeckt. Bei einer Tonfolge mit gleichen Intervallen (z.B. Oktaven) bilden die zu greifenden Seitenlängen eine solche Reihe. Die Gleichung gilt natürlich nur für  $-1 < x < 1$  **sonst =  $\infty$**
- Gleichung 6** entsteht, wenn man (5) auf beiden Seiten integriert.  $\rightarrow$  **überprüfen!**  
 Viele Taschenrechner berechnen über diese Gleichung die Logarithmuszahlen. Es stört dabei nicht, dass sie nur für  $-1 < x < 1$  gilt, da beim 10er-Logarithmus jede Zahl entsprechend umgeformt werden kann:  $\log 1748 = \log 0,1748 \cdot 10^4 = \log 0,1748 + 4$ .

**Wie erfährt Euler von diesen unendlichen Potenzreihen?**  
 Euler studiert bei Johann Bernoulli, einem Freund seines Vaters. Die Bernoulli-Brüder gehören zu den führenden Mathematikern Europas. Sie wenden als erste die neue Analysis von Newton & Leibniz an. Sie kennen auch die Arbeit von Taylor, der in Cambridge bei Newton studiert.

## Euler kann mit komplexen Zahlen rechnen

**Idee**

- Was sind komplexe Zahlen und wie kann man sie veranschaulichen? Ergänzt man die reellen Zahlen durch die „Minuswurzeln“ (Wurzeln mit negat. Radikanden), erhält man die komplexen Zahlen. Sie liegen ober- bzw. unterhalb der Zahlengeraden und müssen mit 2 Koordinaten dargestellt werden (wobei die neue Koordinatenachse  $i$ -Achse genannt,  $\sqrt{-1}$  mit  $i$  bezeichnet und  $i^2 := -1$  gesetzt wird).
- Wozu benötigt man Minuszahlen? **Um jede lineare Gleichung lösen zu können.**  
 Wozu benötigt man Minuswurzeln? **Um jede ganzrationale Gleichung lösen zu können.**  
 Lösen Sie die Gleichung  $(x-2)^2 = -0,49$  und markieren Sie die Ergebniszahl in der Zahlenebene.  
 $(x-2)^2 = -0,49 \Leftrightarrow x-2 \pm \sqrt{0,49(-1)} \Leftrightarrow x-2 \pm 0,7i$  („2 nach rechts und 0,7 nach oben bzw. unten“)
- Wieso darf mit Minuswurzeln nur indirekt (mit  $i$ ) gerechnet werden? \*  $-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq \sqrt{1} = 1$
- Wie hat man erkannt, dass Minuswurzeln sehr nützlich sind?  
 Seit 1545 kennt man die Cardanische Formel, mit der man jede kubische Gleichung lösen kann. Die Formel liefert z.B. bei  $x^3 - 15x - 4 = 0$  die Minuswurzel  $\sqrt{-121}$ . Rechnet man mit dieser sinnvoll weiter, erhält man die richtige Lösung  $x=4$  (s. Aufg. 27).

<b>3 Darstellungsformen</b>	kartes. Koord. Punkt-/Summenform Polarkoord. Punkt-/ e-Form Mischkoord. cos-sin-Form	$(4   3)_K = 4 + 3i$ „4 nach rechts, 3 rechtwinklig nach oben“ $(5   2)_P = 5 \cdot e^{2i}$ „5 nach rechts, 2 <sup>RAD</sup> kreisförmig nach oben“ $(5 \cdot \cos 2   5 \cdot \sin 2)_K$ Polarkoord. 5 u. 2 sichtbar, das Ergebnis sind jedoch kart. Koord.
<b>Umwandlung</b>	kartes. Koord. $\leftrightarrow$ Polarkoord.	$(r   \varphi)_P = (r \cdot \cos \varphi   r \cdot \sin \varphi)_K$ $(5   2)_P = (5 \cdot \cos 2   5 \cdot \sin 2)_K \approx (-2,08   4,55)_K$ $(a   b)_K = (\sqrt{a^2 + b^2}   \pm \cos^{-1} \frac{a}{r})_P$ neg., falls b neg. $(4   3)_K = (\sqrt{16 + 9}   \pm \cos^{-1} \frac{4}{5})_P \approx (5   0,64)_P$
<b>Rechnen mit kartes. Koord.</b>	Strichrechnung leicht	$(a b)_K + (c d)_K = (a+c   b+d)_K$ $(a b)_K \cdot (c d)_K = (ac-bd   ad+bc)_K$ <b>Ausmultiplizieren</b> $(a b)_K - (c d)_K = (a-c   b-d)_K$ $(a b)_K : (c d)_K = \left( \frac{ac+bd}{c^2+d^2}   \frac{-ad+bc}{c^2+d^2} \right)_K$ <b>Erweitern mit c-di</b>
<b>Rechnen mit Polarkoord.</b>	Punktrechnung leicht	$(r \alpha)_P + (s \beta)_P = \dots$ zu kompliziert... $(r \alpha)_P \cdot (s \beta)_P = (rs   \alpha+\beta)_P$ $(r \alpha)_P - (s \beta)_P = \dots$ zu kompliziert... $(r \alpha)_P : (s \beta)_P = (r:s   \alpha-\beta)_P$
$\bar{z}$ „z konjugiert“ $ z $ „z Betrag“	• meint die an der reellen-Achse gespiegelte Zahl • meint den Abstand zum Ursprung 0	$z = (4 3)_K \Rightarrow \bar{z} = (4 -3)_K$ $ z  = \sqrt{\text{Realteil}^2 + \text{Imaginärteil}^2} = 5$

\* Das direkte Rechnen mit  $\sqrt{-1}$  ist schwierig. Aufgrund der negat. Basis u. des geraden Exponent-Nenners gelten die gängigen Potenzgesetze nicht mehr.

## Eulers Frage

Was „macht“ die e-Funktion mit einer komplexen Zahl?

### Eulers Entdeckung

$$\begin{aligned}
 e^{a+bi} &= e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot \left( \frac{(bi)^0}{0!} + \frac{(bi)^1}{1!} + \frac{(bi)^2}{2!} + \frac{(bi)^3}{3!} + \frac{(bi)^4}{4!} + \frac{(bi)^5}{5!} \dots \right) \\
 &= e^a \cdot \left( \frac{b^0 i^0}{0!} + \frac{b^1 i^1}{1!} + \frac{b^2 i^2}{2!} + \frac{b^3 i^3}{3!} + \frac{b^4 i^4}{4!} + \frac{b^5 i^5}{5!} \dots \right) = e^a \cdot \left( \frac{b^0}{0!} + \frac{b^1 i}{1!} - \frac{b^2}{2!} - \frac{b^3 i}{3!} + \frac{b^4}{4!} + \frac{b^5 i}{5!} \dots \right) \\
 &= e^a \cdot \left( \frac{b^0}{0!} - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \dots + i \cdot \left( \frac{b^1}{1!} - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} \dots \right) \right) = e^a \cdot (\cos b + i \cdot \sin b)
 \end{aligned}$$

Die e-Funktion interpretiert die Minuswurzel  $b \cdot i$  folglich immer als Winkel und vollzieht mit dem komplexen Punkt eine Drehstreckung um den Winkel  $b$ :  $(a|b)_K \rightarrow (e^a \cdot \cos b \mid e^a \cdot \sin b)_K$ . Diese Drehstreckung entspricht nahezu derjenigen, die man zur Transformation von Polar- in kartes. Koordinaten benötigt:  $(r|\varphi)_P \rightarrow (r \cdot \cos \varphi \mid r \cdot \sin \varphi)_K$ .

### Eulers Schlussfolgerung

→ Wenn man in die e-Funktion, statt kartes. Koordinaten  $(a|b)_K$ , Polarkoordinaten  $(r|\varphi)_P$  geschickt einsetzt, ergibt sich exakt diese Transformations-Drehstreckung:  $r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot \cos \varphi + r \cdot i \cdot \sin \varphi$  (*Eulerformel 1748*). Die e-Funktion kann so Polarkoordinaten in kartes. umwandeln. Das erlaubt folgende Schreibweise:  $4 + 3i = 5 \cdot e^{0,6435i} = 5 \cdot \cos(0,6435) + 5i \cdot \sin(0,6435) = 4 + 3i$ .  
 → Die Eulerformel zeigt insbesondere, dass  $(1 \mid \pi)_P = (-1 \mid 0)_K$  gilt, denn  $1 \cdot e^{i\pi} = 1 \cdot \cos \pi + i \cdot \sin \pi = -1$ , was umgestellt  $e^{i\pi} + 1 = 0$  ergibt. Auch wenn diese Gleichung zu keiner neuen Erkenntnis führt und direkt anhand der Zahlenebene ersichtlich ist, empfindet man sie als ausgesprochen „schön“. Denn wer hätte gedacht, dass sich die 5 grundlegenden Konstanten der Mathematik ( $e, \pi, i, 0, 1$ ) so schön u. klar miteinander verbinden lassen. Generell ist es überaus erstaunlich, dass die einfache e-Funktion imstande ist, Drehbewegungen zu bewirken.

## Übung

**25** Wandeln Sie folgende Zahlen in die übrigen 4 Darstellungsformen um, markieren Sie sie in der Zahlenebene und beschriften Sie die notierten Punkte jeweils mit ihren kartesischen- und ihren Polarkoordinaten.

- a)  $3-2i$       b)  $i$       c)  $-i$       d)  $i^2$   
 e)  $\sqrt{-9}$       f)  $\sqrt{-21}$       g)  $\sqrt{13} - 2,5i$       h)  $5$   
 i)  $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$       j)  $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$       k)  $2 \cdot e^{i \cdot 4,5\pi}$       l)  $-3i$   
 m)  $\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

a)-e):  $(3,61|-0,59)_P$   $(1|0,5\pi)_P$   $(1|-0,5\pi)_P$   $(-1|0)_K$   $(1|\pi)_P$   $(0|3)_K$   $(3|0,5\pi)_P$   
 f)-i):  $(0|4,58)_K$   $(4,58|0,5\pi)_P$   $(3,61|-2,5)_K$   $(4,39|-0,61)_P$   $(5|0)_P$   $(5,5|3)_K$   
 j)-m):  $(6,1|1,6)_K$   $(-1,3|-6,1)_K$   $(3|-1,57)_P$   $(3,3|3)_K$

**26** Rechnen Sie möglichst geschickt, geben Sie das Ergebnis in kartesischen und Polarkoordinaten an und überprüfen Sie es mit wolframalpha.

- a)  $(3 + 4i) + (2 - 3i)$       b)  $(-5 + 3i) + (5 - 5i)$   
 c)  $(1 - 2i) - (-4 - i)$       d)  $(6 + 5i) - (8 - 3i)$   
 e)  $(-3 - 4i) \cdot (7 + 4i)$       f)  $(3 + 2i) \cdot (6 - i)$   
 g)  $9 \cdot e^{0,2i} \cdot 8 \cdot e^{-1,1i}$       h)  $-4(-6 + 5i)$   
 i)  $|7 + 6i| \cdot |-i|$       j)  $9e^{0,2i} \cdot 3e^{-1,1i}$

k)  $\frac{1}{-2+8i}$

l)  $\frac{-8+2i}{4-9i}$

a)-d):  $(5|1)_K$   $(5,1|0,2)_P$   $(0|-2)_K$   $(2|-1,5)_P$   $(5|-1)_K$   $(5,1|-0,2)_P$   $(-2|8)_K$   $(8,3|-1,8)_P$   
 e)-g):  $(-5|-40)_K$   $(40,3|-1,7)_P$   $(20|9)_K$   $(21,9|0,4)_P$   $(44,8|56,4)_K$   $(72|-0,9)_P$   
 h)-l):  $(24|-20)_K$   $(31,2|-0,7)_P$   $9,22$   $(0,8|2,9)_K$   $(3|1,3)_P$   $(-0,5|-0,7)_K$   $(0,8|-2,2)_P$

**27** Im Folgenden wird eine kubische Gleichung m. H. der Cardanischen Formel gelöst:

$$\begin{aligned}
 &x^3 - 15x - 4 = 0 \quad | \text{Cardanische Formel s.u.} \\
 \Rightarrow &x_1 = (2 + \sqrt{-121})^{1/3} + (2 - \sqrt{-121})^{1/3} \\
 \Rightarrow &x_1 = (2 + 11\sqrt{-1})^{1/3} + (2 - 11\sqrt{-1})^{1/3} \quad | \text{s. a)} \\
 \Rightarrow &x_1 = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) \\
 \Rightarrow &\underline{x_1 = 4}
 \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass  $(2+11i)^{1/3} = (2+i)$  gilt.  
 b) Inwiefern hat die obige Lösung zur Entdeckung der komplexen Zahlen geführt?

a) „Hoch 3“ auf beiden Seiten, dann Klammer rechts auflösen.  
 b) Da man durch Ausprobieren wusste, dass 4 eine Lösung sein muss, hat man versucht, mit  $\sqrt{-121}$  der Cardanischen Formel „sinnvoll“ weiterzurechnen und auf 4 zu kommen. So entdeckte man einerseits, dass Minuswurzelzahlen „existieren“ (Naturvorgänge abbilden können) und andererseits, wie man mit ihnen rechnen muss.

Cardanische Formel

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad | \quad p := \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c \quad q := b - \frac{a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3}$$

$x_{2,3} = \dots$       | per Polynomdivision mit  $x_1$