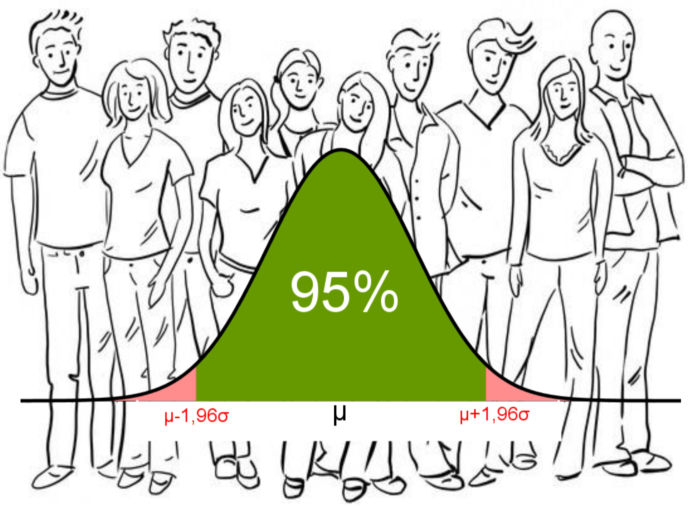
Stefan Bartz:

Vorsicht bei der σ-Regel*

Die σ-Regel gilt nur bei normalverteilten Zufallsgrößen, d.h. nur bei normalverteiltem X entfallen genau 95% aller Ausgänge[1] auf das Intervall [μ ± 1,96·σ]. Ist X anders verteilt, gilt diese Regel höchstens näherungsweise. Folglich muss vor <u>jedem</u> Einsatz geprüft werden, ob die σ-Regel überhaupt angewendet werden <u>darf</u>. Die Notwendigkeit dieser Prüfung wird im Stochastikunterricht jedoch kaum thematisiert und durch Aufgaben verdeutlicht. Der Artikel zeigt (1) wie schnell Fehler entstehen, wenn die σ-Regel ungeprüft verwendet wird, (2) wie anspruchsvoll ihr korrekter Einsatz ist und (3) welche leichtere Alternative es stattdessen gibt. Insgesamt möchte der Aufsatz dazu beitragen, dass die σ-Regel sicher und reflektiert angewendet werden kann.



1. Typische Fehler

In den unteren drei Beispielen werden typische Fehler beim Bestimmen von Hauptstreubereichen (kurz HSB) und Vertrauensintervallen aufgezeigt. Durch den fehlerhaften Einsatz der σ-Regel entstehen unzulässige Näherungen, die so stark von der exakten Lösung abweichen, dass falsche Entscheidungen entstehen *können* (s. letztes Beispiel). Um die Stärke der Abweichung zu verdeutlichen, ist die exakte Lösung zum Vergleich angegeben. Wie deren Werte ohne σ-Regel ermittelt werden, beschreibt Abschnitt 3. Warum sind folgende Näherungen unzulässig?

HSB gesucht (Grundgesamtheit → Stichprobe)
234 der 1000 Schüler Ihrer Schule sind Vegetarier. Mit wie vielen Vegetariern können Sie bei einer Stichprobe von 200 Schülern rechnen? Geben Sie einen 95%igen HSB an.

Lösung: grobe Näherung mit σ-Regel: $x \in [n \cdot p \pm \sqrt{n}] = [200 \cdot 0{,}234 \pm \sqrt{200}] = [32{,}6\ldots;\ 60{,}9\ldots] = [32;\ 61]$
bessere Näherung mit σ-Regel: $x \in [n \cdot p \pm 1{,}96\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}] = [35{,}0\ldots;\ 58{,}5\ldots] = [35;\ 59]$
exakte Lösung: $x \in [36;\ 57]$ (s. Abschnitt 3)

Vertrauensintervall gesucht (Grundgesamtheit ← Stichprobe)
56 von 200 befragten Schülern waren in ihrer Schulzeit schon einmal Mobbingopfer. Schätzen Sie den Anteil der Mobbingopfer der gesamten Schule (1000 Schüler) mit einem 95%igen Vertrauensintervall.

Lösung: grobe Näherung mit σ-Regel: $p \in [h \pm \frac{1}{\sqrt{n}}] = [0{,}28 \pm \frac{1}{\sqrt{200}}] = [0{,}2092\ldots;\ 0{,}3507\ldots] \approx [0{,}209;\ 0{,}351]$
bessere Näherung mit σ-Regel: $p \in [h \pm \frac{1{,}96 \cdot \sqrt{h \cdot (1-h)}}{\sqrt{n}}] = [0{,}2177\ldots;\ 0{,}3422\ldots] \approx [0{,}217;\ 0{,}343]$
exakte Lösung: $p \in [0{,}229;\ 0{,}340]$ (s. Abschnitt 3)

HSB gesucht (Grundgesamtheit mit H_0 → Stichprobe)
Es soll die Nullhypothese, dass die 500 Mädchen und 500 Jungen der Schule gleichintelligent sind, getestet werden. Dazu werden 200 zufällige Junge-Mädchen-Paare gebildet. Bei 112 davon hatte der Junge einen höheren IQ. Ist die Abweichung vom Mittelwert signifikant?

---

* Aus: Praxis der Mathematik, Heft 67 (2016) S. 44-47

[1] Bezogen auf eine unendliche Versuchsreihe.

Lösung: grobe Näherung: $x \in [n \cdot p_0 \pm \sqrt{n}\,] = [200 \cdot 0{,}5 \pm \sqrt{200}] = [85{,}8...; 114{,}1...] = [85; 115]$ $\Rightarrow$ nicht signifikant

bessere Näherung: $x \in [n \cdot p_0 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{n \cdot p_0 \cdot (1-p_0)}] = [86{,}1...; 113{,}8...] = [86; 114]$ $\Rightarrow$ nicht signifikant

exakte Lösung: $x \in [89; 111]$ (s. Abschnitt 3) $\Rightarrow$ signifikant

2. Welche Version der σ-Regel darf wann verwendet werden?

Ist eine Zufallsvariable X ausreichend normalverteilt[2], entfallen nahezu 95% der Zufallsausgänge auf das Intervall $[\mu \pm 1{,}96 \cdot \sigma]$. Ist X ausreichend normal- *und* binomialverteilt, kann μ mit $n \cdot p$ und σ mit $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ bestimmt und weiter $p \cdot (1-p) \leq 0{,}25$ gesetzt werden (da die Parabel $f(x)=x \cdot (1-x)$ bei $(0{,}5|0{,}25)$ einen Hochpunkt besitzt). Insgesamt erscheint die σ-Regel somit in folgenden Versionen:

$$x \in [\,\mu \pm 1{,}96 \cdot \sigma\,] = \left[n \cdot p \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\,\right] \leq \left[n \cdot p \pm 0{,}98 \cdot \sqrt{n}\,\right] < \left[n \cdot p \pm \sqrt{n}\,\right]$$

Wird nicht die absolute, sondern die relative Häufigkeit als Zufallsvariable betrachtet, reduzieren sich auch μ und σ um den Faktor $1/n$. Die σ-Regel präsentiert sich bei relativen Häufigkeiten damit in folgendem Gewand:

$$\frac{x}{n} \in \left[\,\frac{\mu}{n} \pm \frac{1{,}96\sigma}{n}\,\right] = \left[\,p \pm \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,\right] < \left[p \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\,\right].$$

Folgende Tabelle zeigt, in welcher Anwendungssituation welche Version der σ-Regel in brauchbarer Näherung gilt:

Gesucht		**σ-Regel**, falls X ausreichend normalverteilt ist	normal- und binomialverteilt ist
95% HSB Grundgesamtheit → Stichprobe	für abs. Häufigkeiten	$x \in [\mu \pm 1{,}96 \cdot \sigma]$	$= \left[n \cdot p \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\right] < \left[n \cdot p \pm \sqrt{n}\right]$
	für rel. Häufigkeiten*	$h \in \left[\frac{\mu}{n} \pm \frac{1{,}96 \cdot \sigma}{n}\right]$	$= \left[\,p \pm \frac{1{,}96 \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}\,\right] < \left[\,p \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$
95% Vertrauensintervall Grundgesamtheit ← Stichprobe		$p \in \left[h \pm \frac{1{,}96 \cdot s}{n}\right]^{**}$	$= \left[\,h \pm \frac{1{,}96 \cdot \sqrt{h \cdot (1-h)}}{\sqrt{n}}\,\right] < \left[\,h \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$
95% HSB Grundgesamtheit mit H_0 → Stichprobe		$x \in [\mu \pm 1{,}96 \cdot \sigma]$	$= [n \cdot p_0 \pm 1{,}96\sqrt{np_0(1-p_0)}] < [n \cdot p_0 \pm \sqrt{n}\,]$

* h := x/n ** Im Anhang wird gezeigt, warum dieser Zusammenhang gelten muss. σ wird mit s, der Standardabweichung der Stichprobe, geschätzt.

Vor jedem Einsatz der σ-Regel muss also geprüft werden, ob die betrachtete Zufallsvariable X ausreichend normal- bzw. normal- *und* binomialverteilt ist. Das ist nur mit Faustformeln wie $\sigma \geq 3$ oder $N \geq 20n$ möglich. In den Beispielen aus Abschnitt 1 wird aus einer Grundgesamtheit von 1000 Schülern 200-mal „gezogen". Die Zufallsgröße X erfasst die Anzahl der Treffer beim „Ziehen ohne Zurücklegen" und ist somit hypergeometrisch verteilt. Da die Faustformel $\sigma \geq 3$ für alle Beispiele gilt[3], **kann X zwar als ausreichend normal-, nicht jedoch als ausreichend binomialverteilt** angesehen werden. Dazu müsste zusätzlich $N \geq 20 \cdot n$ gelten, was bei N=1000 und n=200 nicht zutrifft. Folglich dürfen nicht die Näherungsintervalle der letzten, sondern nur die der mittleren Tabellenspalte verwendet werden. In den Lösungen sind somit die falschen Intervalle gewählt worden; σ hätte nicht mit dem binomialen $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ sondern mit dem hypergeometrischen $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{(N-n)}{(N-1)}}$ bestimmt werden müssen. Noch ein weiterer Fehler ist unterlaufen: Im ersten und dritten Beispiel wurde zwar nach außen gerundet, jedoch nicht bis zur Stetigkeitskorrektur hin[4]. *Korrekt* eingesetzt, hätte die σ-Regel *brauchbare* Näherungen erzeugt, bei denen *keine* falsche Entscheidung impliziert worden wäre:

Lösung1: Näherung mit σ-Regel: $x \in [\mu \pm 1{,}96\sigma] = [36{,}2...; 57{,}3...] = [35{,}5; 57{,}5] = [36; 57]$

exakte Lösung: $x \in [36; 57]$

---

[2] X heißt „ausreichend normalverteilt", wenn die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X=x)$ durch die Normalverteilung in brauchbarer Näherung beschrieben werden, also: $P(X=x) \approx Nor_{\mu,\sigma}(X=x)$. Gilt $P(X=x) \approx Bin_{n,p}(X=x)$, so heißt X „ausreichend binomialverteilt".

[3] $\sigma_1 = 5{,}4$, $\sigma_2 \approx s_2 = 5{,}7$, $\sigma_3 = 5{,}5$. Bei Hypergeometrischen Verteilungen gilt $\mu = n \cdot p$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{(N-n)}{(N-1)}}$ und $p = \frac{R}{N}$; N, n beschreiben die Gesamtanzahl und R, x die Merkmalsanzahl in der Grundgesamtheit bzw. in der Stichprobe.

[4] Es muss bis zum Rand der beiden äußeren Histogrammsäulen gerundet werden, links also ab- und rechts aufgerundet: /•\.

Lösung2: Näherung mit σ-Regel: $p \in [\, h \pm \frac{1{,}96 \cdot s}{n} \,] = [0{,}2243\ldots;\ 0{,}3356\ldots] \approx [0{,}224;\ 0{,}336]$
exakte Lösung: $p \in [0{,}229;\ 0{,}340]$

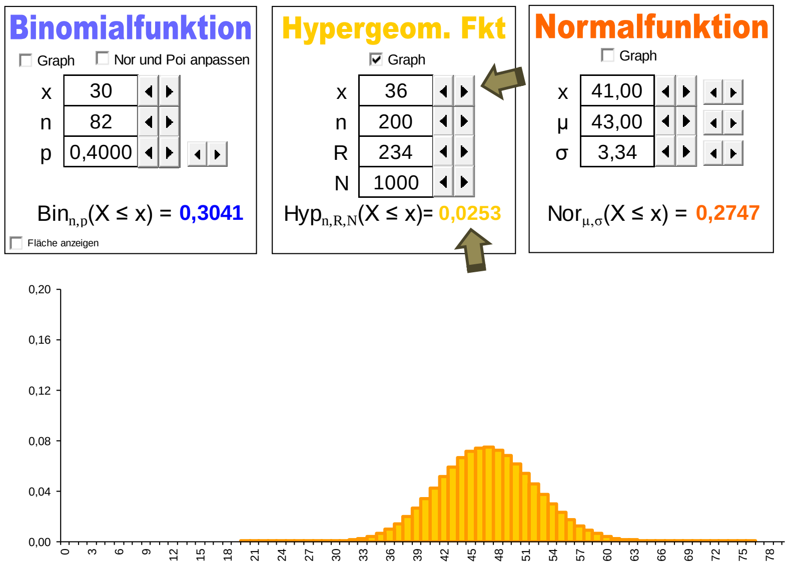
Lösung3: Näherung mit σ-Regel: $x \in [\mu \pm 1{,}96\sigma] = [89{,}2\ldots;\ 110{,}7\ldots] = [88{,}5;\ 111{,}5] = [89;\ 111]$ ⇒ signifikant
exakte Lösung: $x \in [89;\ 111]$ ⇒ signifikant

Bereits diese einfachen und alltäglichen Beispiele zeigen, wie anspruchsvoll die korrekte Anwendung der σ-Regel ist. Schüler müssen dazu:

- ❖ einen Überblick über die verschiedenen Versionen der σ-Regel besitzen und wissen, wann welche Version erlaubt ist.
- ❖ die Faustformeln $\sigma \geq 3$ und $N \geq 20n$ kennen und anwenden.
- ❖ Hypergeometrische-, Binomial- und Normalverteilung klar unterscheiden können und wissen, wie man μ und σ dabei jeweils bestimmt.
- ❖ wissen, dass nach außen gerundet werden muss und die Stetigkeitskorrektur dabei ggf. beachten und verstehen.
- ❖ sich bewusst sein, dass man bei diesen Näherungsintervallen letztendlich nie weiß, wie präzise die Lösung ist.

3. Hauptstreubereiche und Vertrauensintervalle leichter ohne σ-Regel bestimmen

HSBs und Vertrauensintervalle brauchen heutzutage nicht mehr an Näherungsverteilungen, sondern können direkt an der tatsächlich vorliegenden Verteilung ermittelt werden. Moderne Taschenrechner, Geogebra oder die im Internet abrufbare Exceldatei stochastik.xlsm[5] stellen die kumulierten Funktionswerte so schnell zu Verfügung, dass der Umweg über „ungewisse" Näherungen nicht mehr notwendig ist. Über die Scrollbutton des Excelblatts (s. Abb.) können die Intervalle sämtlicher Parameter und Variablen **leicht und nachvollziehbar** ermittelt werden. Für das erste Anfangsbeispiel stellt man bei der hypergeometrischen Verteilung N=1000, R=234, n=200 ein und bestimmt alle Trefferzahlen x, bei denen die kumulierten Wahrscheinlichkeitswerte zwischen 2,5% und 97,5% liegen. Im zweiten Beispiel stellt man N=1000, n=200, x=56 ein und bestimmt alle Zahlen R, für die die kumulierten Wahrscheinlichkeitswerte ebenfalls zwischen 2,5% und 97,5% liegen. Im letzten Beispiel gibt man N=500, R=250, n=200 ein und ermittelt alle Zahlen x, so dass wieder 2,5% ≤ Hyp(X≤x) ≤ 97,5% gilt.[6,7]



4. Resümee

- Vorsicht bei der σ-Regel! Sie setzt voraus, dass die betrachtete Zufallsgröße ausreichend normal- bzw. normal- *und* binomialverteilt ist. Dies klar zu erkennen und richtig zu überprüfen ist für Anfänger schwierig. Die σ-Regel sollte daher **nicht zu früh** eingesetzt werden. Das

---

5 unter www.stefanbartz.de/materialien

6 Werden 2,5% und 97,5% nicht genau getroffen, wird hier nicht wie oben nach außen /•\, sondern in beiden Fällen nach rechts \•\ gerundet; d.h. man nimmt diejenigen Werte in das zu bestimmende Intervall auf, bei denen 2,5% bzw. 97,5% zum ersten Mal übertroffen werden. Somit verbleiben weniger als 2,5% der Histogrammfläche am linken bzw. rechten Rand.

7 Durch das Excelblatt werden Tabellenwerke im Stochastikunterricht überflüssig. Zusätzlich können die Graphen der jeweiligen Verteilungen übereinander eingeblendet werden. Sie veranschaulichen ebenfalls, dass die oben dargestellte hypergeometrische Verteilung zwar gut mit der entsprechenden Normal- nicht jedoch mit der Binomialverteilung übereinstimmt. Weitere Erläuterungen sind im Artikel „Excelblatt vereinfacht Stochastik" (ebenfalls unter www.stefanbartz.de/materialien) zu finden.

obige Excelblatt erlaubt, dass alle Hauptstreubereiche und Vertrauensintervalle zunächst anhand der *tatsächlichen Verteilung* bestimmt werden. Erst wenn die Schüler mit den tatsächlichen Verteilungen keine Probleme mehr haben, sollte zur σ-Regel – d.h. zu einer *Näherungsverteilung*, die parallel zur tatsächlichen betrachtet wird – gewechselt werden.

- Bereits einfache Umfragen erfordern **Hypergeometrische Verteilungen** („Ziehen ohne Zurücklegen"). Dieser Verteilungstyp ist von so grundlegender Bedeutung und lässt sich so leicht in Anlehnung an die Binomialverteilung („Ziehen mit Zurücklegen") vermitteln, dass er in keinem Stochastikkurs fehlen darf. Seine enorme didaktische Relevanz wird vielfach unterschätzt. Die Beispiele verdeutlichen, dass ohne diese 3. Grundverteilung weder ein sicherer Umgang mit der σ-Regel noch mit Verteilungen generell erlangt werden kann.
- Wieso spielt die **σ-Regel** innerhalb der Stochastik eine so wichtige Rolle? Zum einen, weil Normalverteilungen aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes (ZGWS) allgegenwärtig sind und die σ-Regel somit in vielen Fällen gültig ist. Vor allem aber, weil wichtige Kernzusammenhänge der Stochastik erst mithilfe der σ-Regel überblickt und verstanden werden können (s. Anhang).
- Die in der Literatur verwendeten Begriffe „Prognoseintervall", „Schwankungsintervall", „Annahmebereich", „Ablehnungsbereich", „Verwerfungsbereich", „**Hauptstreubereich**", ... meinen im Prinzip dasselbe und sollten durch einen einzigen ersetzt werden. Der Begriff „Hauptstreubereich" birgt die meisten Vorzüge: Er stellt das *Grundphänomen* und nicht das *Berechnungsziel* in den Fokus; das fördert das Verständnis und verhindert eine Begriffsinflation. Der Name „Streubereich" signalisiert, dass man diesen Bereich mit dem Streumaß σ messen kann. Außerdem kann das Ergebnis eines Hypothesentests mit dem Begriff „Hauptstreubereich" klarer und verständlicher ausgedrückt werden, etwa: *„Da das Stichprobenergebnis <u>außerhalb</u> des Hauptstreubereichs von H_0 liegt, kann es als außergewöhnlich, als überzufällig, als signifikant angesehen werden."*

(Anhang) Die σ-Regel zeigt den Zusammenhang zwischen: dem ZGWS | dem Hauptstreubereich um h | dem Vertrauensintervall um p | der Tschebyscheff-Ungleichung | dem Gesetz der großen Zahlen.

Wenn: X ausreichend normal- und binomialverteilt ist — ZGWS, Faustformeln (σ≥3; N≥20n)

dann: $P(\mu - 1{,}96\,\sigma \le x \le \mu + 1{,}96\,\sigma) \approx 0{,}95$ — σ-Regel*

$\Rightarrow P(np - 1{,}96\sqrt{np(1-p)} \le x \le np + 1{,}96\sqrt{np(1-p)}) \approx 0{,}95$ | : n (bleibt normalverteilt)

$\Rightarrow P\left(p - \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le \frac{x}{n} \le p + \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}95$ | $h := \frac{x}{n}$ (relative Häufigkeit)

$\Rightarrow P\left(p - \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le h \le p + \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}95$ ■ Hauptstreubereich um h

$\xrightarrow{p(1-p)\le 0{,}25}$

$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \le h \le p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ge 0{,}95$

■ Empirisches Gesetz der großen Zahlen (Stabilisierung innerhalb des $1/\sqrt{n}$ Trichters)

$\xrightarrow{|-h\ |-p\ |\cdot(-1)}$

$P\left(h + \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ge p \ge h - \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}95$ | $\sqrt{p(1-p)} \approx \sqrt{h(1-h)}$

$P\left(h - \frac{1{,}96\sqrt{h(1-h)}}{\sqrt{n}} \le p \le h + \frac{1{,}96\sqrt{h(1-h)}}{\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}95$ ■ Vertrauensintervall um p

$\xrightarrow{b := \text{Intervallbreite}}$

$b = 2\cdot\frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ | quadrieren

$nb^2 = 4\cdot 1{,}96^2\cdot p(1-p)$ | $p(1-p) \le 0{,}25$

$n \ge \frac{1{,}96^2}{b^2}$ ■ Abschätzung des Stichprobenumfangs bei vorgegebenem b

* Dass die σ-Regel bei allen normalverteilten Zufallsgrößen gilt, lässt sich durch die Berechnung des Integrals $\int_{\mu-1{,}96\sigma}^{\mu+1{,}96\sigma} Nor_{\mu,\sigma}(X=x)\,dx$ zeigen.